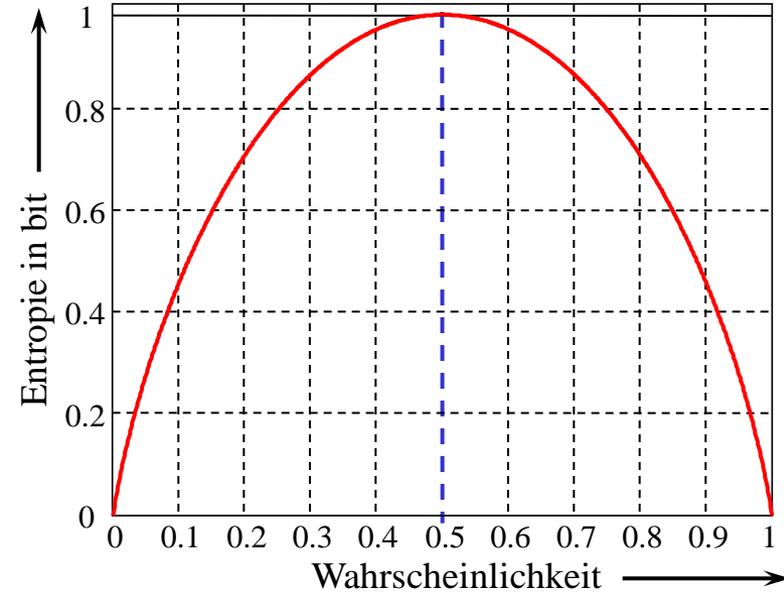


# Darstellung von Information und ihre digitale Verarbeitung

Entropie einer binären Quelle



Entropie einer Nachrichtenquelle

$$H = \sum_{i=1}^N p(x_i) \cdot \text{ld} \left( \frac{1}{p(x_i)} \right) \text{ in bit}$$

Zahl der Symbole

Auftrittswahrscheinlichkeit eines Symbols

binäre Quelle mit  $p(x_1)=p(x_2)$

$$H_B = \sum_{i=1}^2 p(x_i) \cdot \text{ld} \left( \frac{1}{p(x_i)} \right) = \frac{1}{2} \text{ld}(2) + \frac{1}{2} \text{ld}(2) = 1 \text{ bit}$$

bei gleicher Auftrittswahrscheinlichkeit  $p(x_i)=1/N$  gilt:

$$H_G = \text{ld}(N)$$

analoges Signal, abgetastet mit  $2f_g$  und quantisiert mit  $N$  Amplitudenstufen

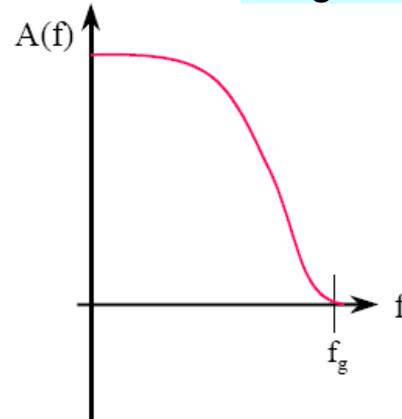
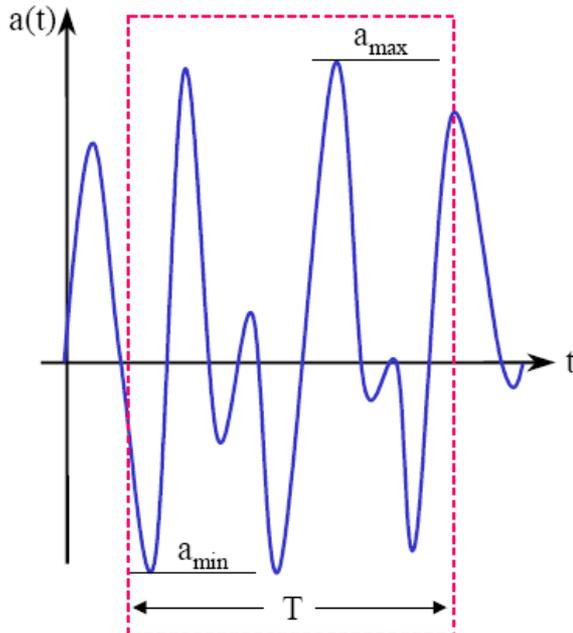
$$H_{AST} = 2 \cdot f_g \cdot T \cdot \text{ld}(N) \quad [\text{bit}]$$

Dauer:  $T = 1 \text{ s}$

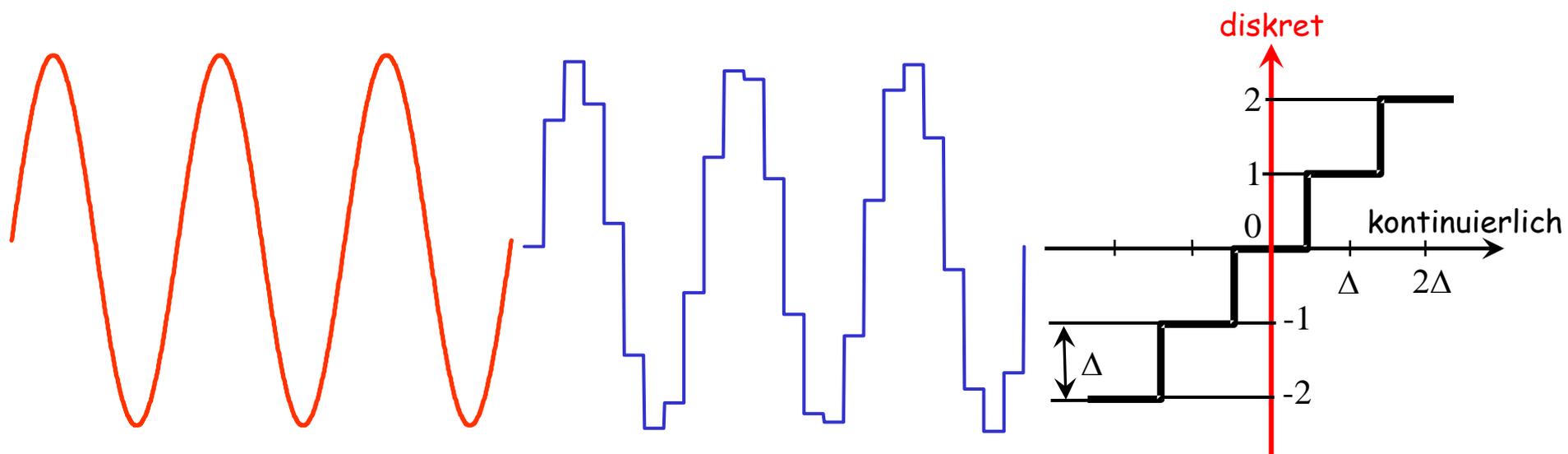
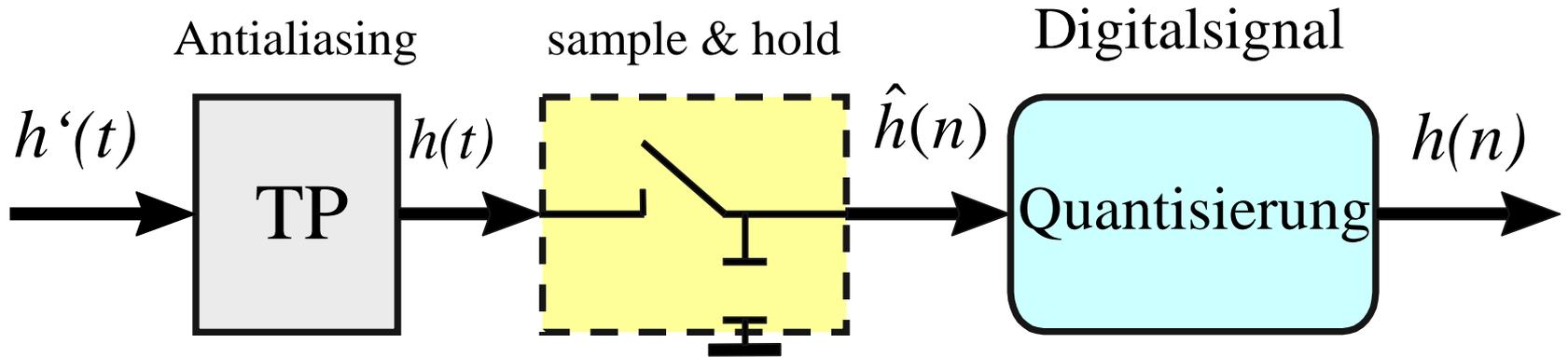
Grenzfrequenz:  $f_g = 15 \text{ kHz}$

Zahl der Amplitudenstufen:  $N = 65.536 \approx 2^{16}$

$$H_{AST} = 1 \text{ s} \cdot 2 \cdot 15.000 \text{ s}^{-1} \cdot \text{ld}(2^{16}) \text{ bit} = 30.000 \cdot 16 \text{ bit} = 480.000 \text{ bit}$$

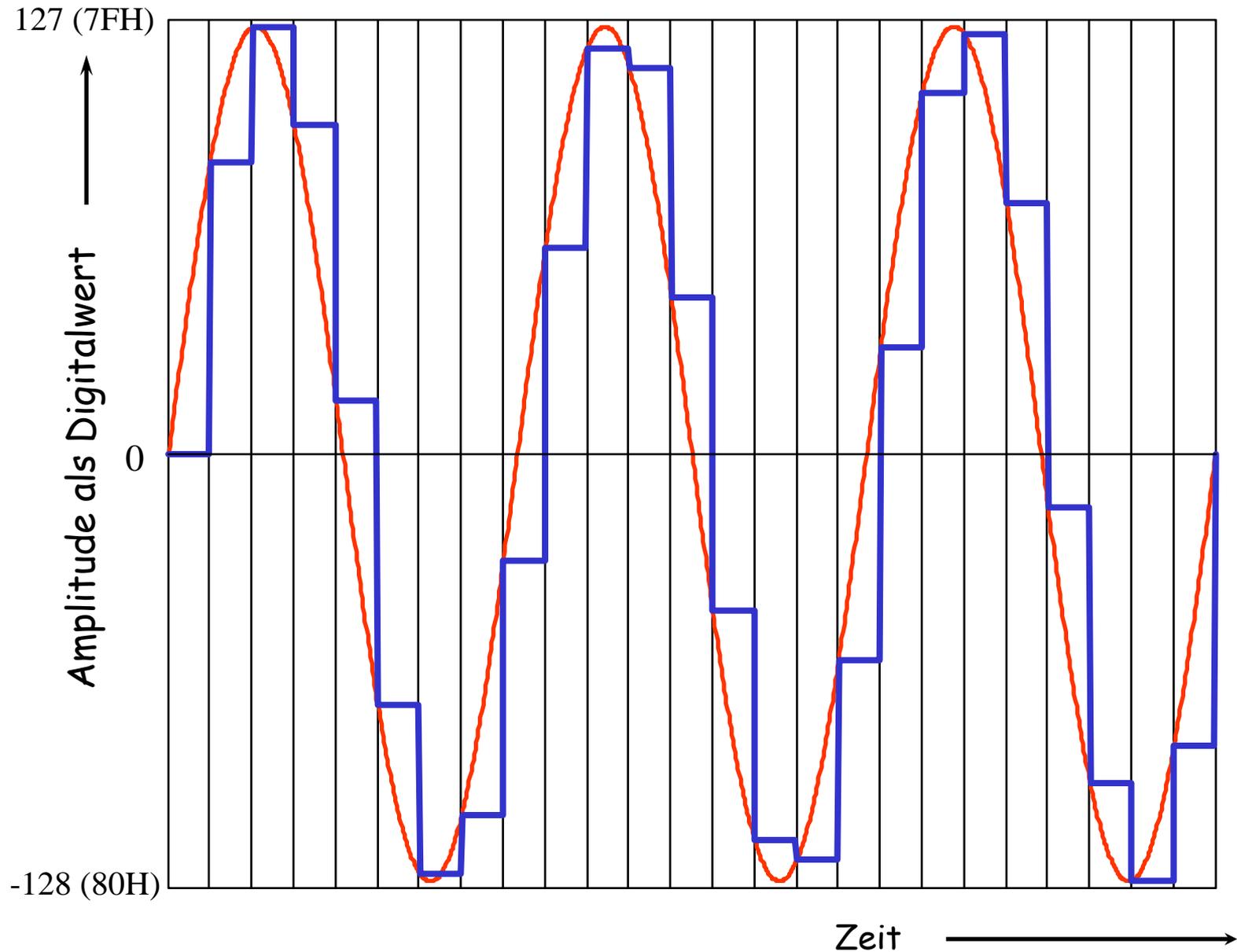


# Schritte einer A/D-Wandlung: Vorfiltern, Abtasten, Quantisieren



Signal-Störverhältnis für eine Auflösung von  $Z$  bit:  $\frac{a}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{S_s}{N_q} \right) \approx 2 + 6 \cdot Z$

# Beispiel: Digitalisierung eines Sinussignals mit 8bit

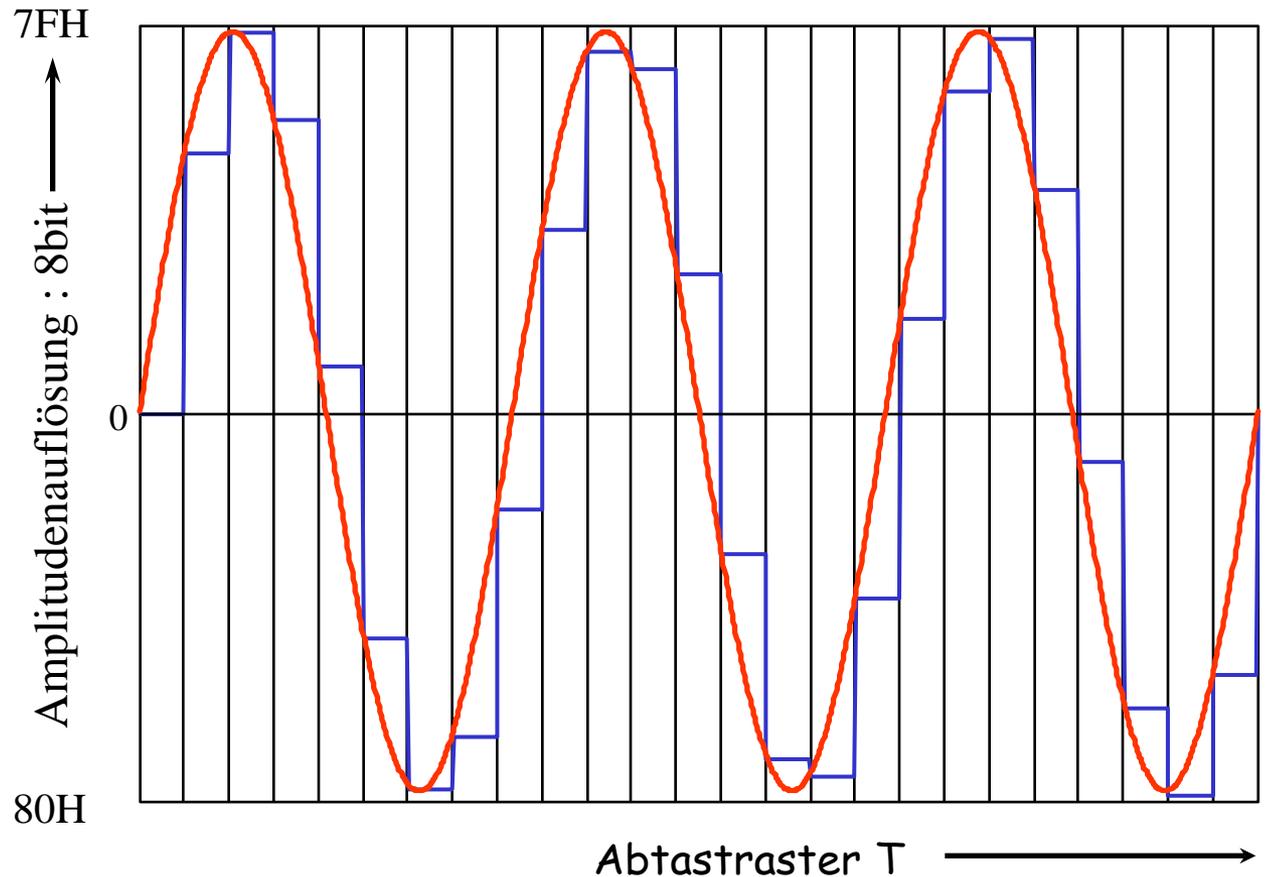
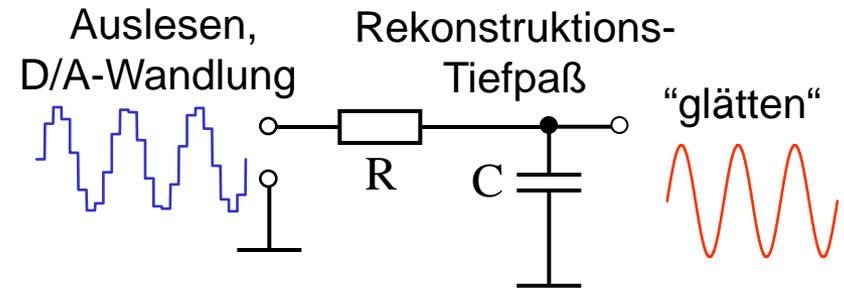


# Pulse-Code-Modulation (PCM) und \*.WAV-Dateien

## Parameter:

**Zahl der Kanäle:** NumChannels  
**Abtastrate 1/T:** SampleRate  
**Auflösung (bit):** Resolution

## Wiedergabe

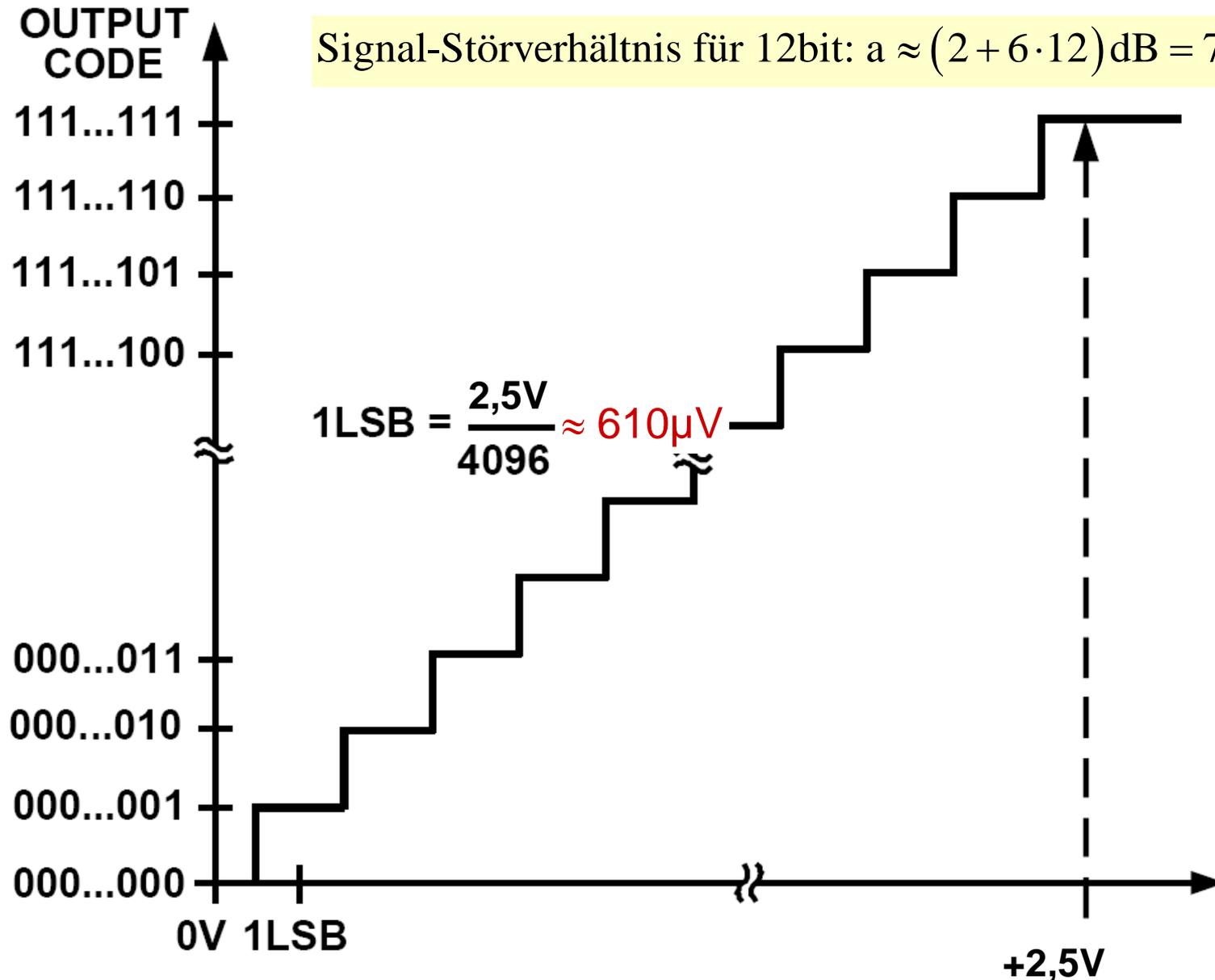


WAV\_INV.mcd

WAV\_ENIA.mcd

# Quantisierungskennlinie eines 12-bit-A/D-Wandlers integriert in einem Mikroconverter ADuC842

Signal-Störverhältnis für 12bit:  $a \approx (2 + 6 \cdot 12) \text{dB} = 74 \text{dB}$



# Übersicht über die Theorie zur Signalabtastung

unendliche Folge von Dirac-Impulsen im Zeitbereich:  $\text{III}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$

die Fouriertransformation liefert das Spektrum:  $\text{III}(t) \circ \bullet \text{III}(f)$

$\text{III}(t)$  stellt eine **selbstabbildende** Funktion dar

im Folgenden wird ein anschaulicher „Beweis“ betrachtet, der später bei der Untersuchung von Mehrträgermodulation nützlich sein wird

$$\text{III}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \circ \bullet \text{III}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f-n)}_{\text{soll gezeigt werden}}$$

das Ergebnis rechts folgt wegen:

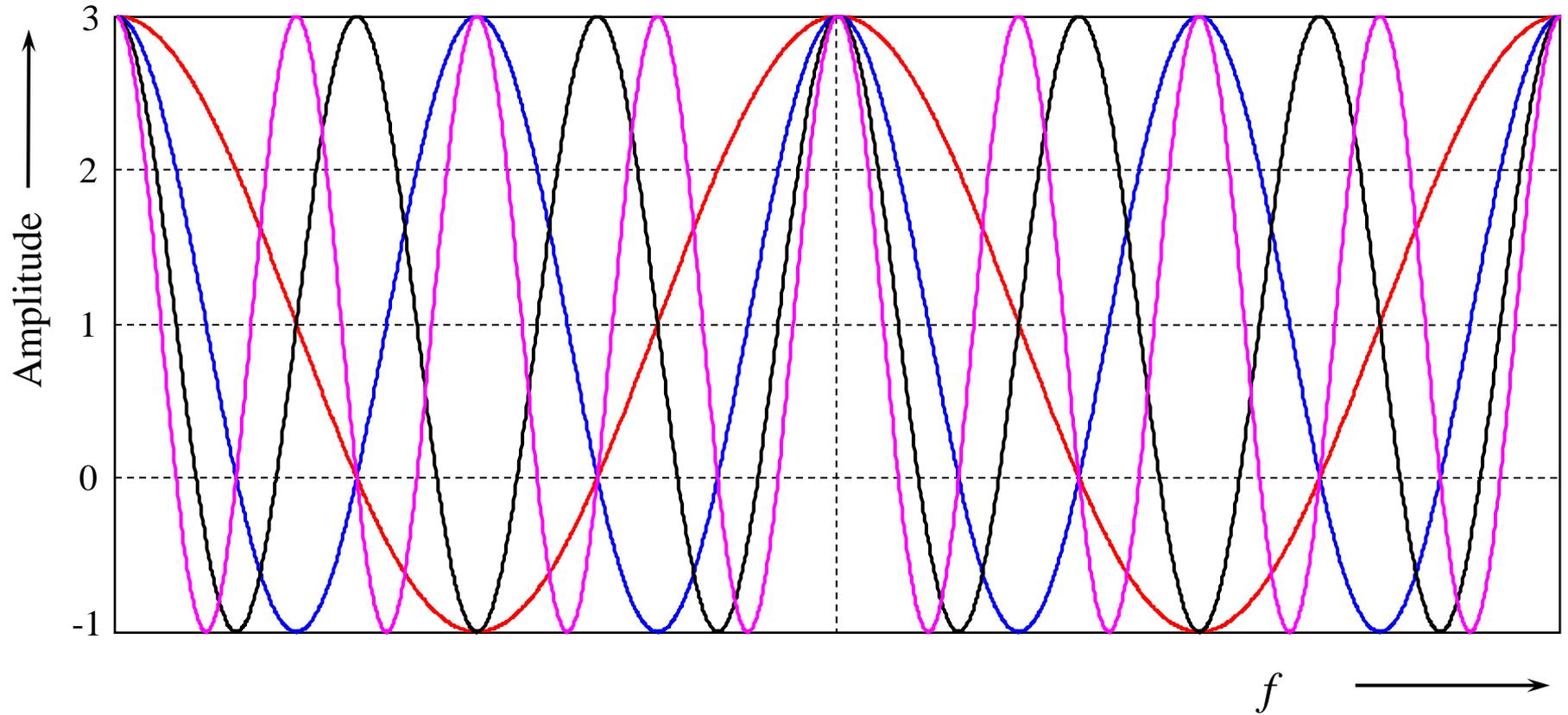
$$s(t-\tau) \circ \bullet S(f) \cdot e^{-j2\pi f \tau},$$

es ist  $\delta(t-\tau) \circ \bullet e^{-j2\pi f \tau}$

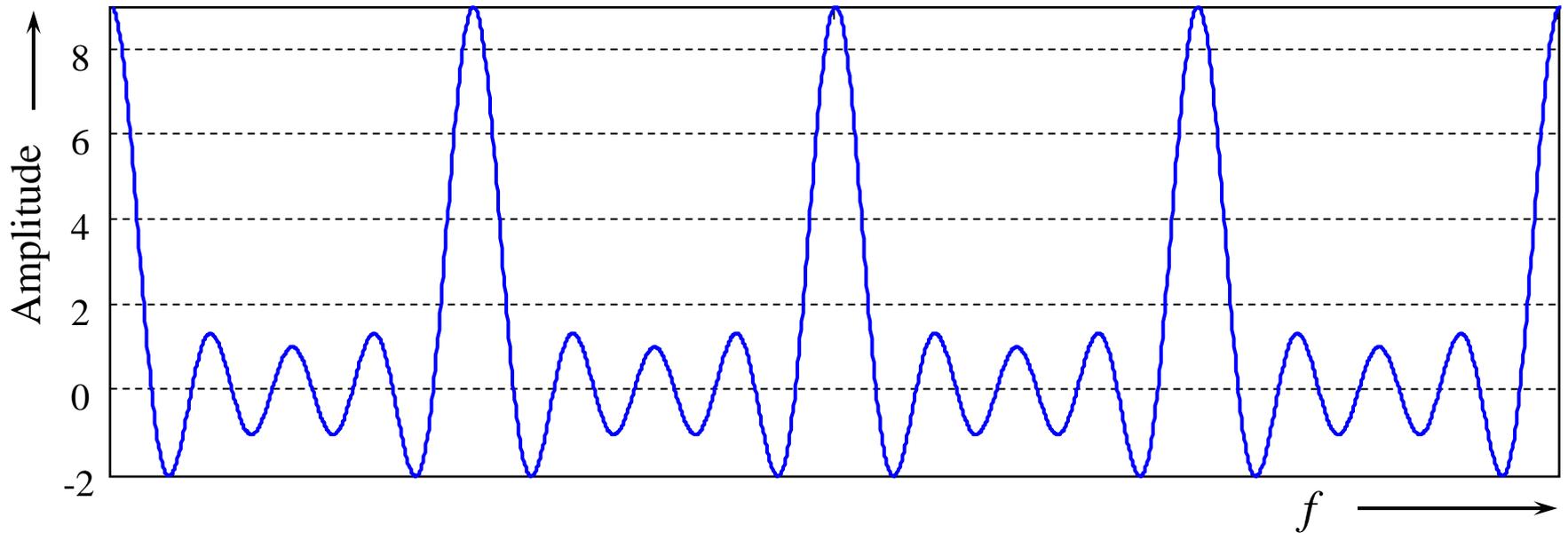
da über ein symmetrisches Intervall summiert wird, verschwindet die ungerade Sinusfunktion, und die gerade (Cosinus) wird verdoppelt:

$$\text{III}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n f} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n f)$$

# Verlauf der ersten vier Cosinusfunktionen



# Summation der ersten vier Cosinusfunktionen



# Summation von 1000 Cosinusfunktionen



# Schritte zur geeigneten Skalierung von Abtastfunktionen

Einführung eines Abtastzeitrasters  $T=1/f_s < 1/2f_g$

$$\text{III}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad \text{mit } \delta(bt) = \frac{1}{|b|} \cdot \delta(t) \text{ erhalt man: } \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{1}{T} \cdot (t - nT)\right) = |T| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

dann ergibt sich mit  $h(bt) \circ \bullet \frac{1}{|b|} \cdot H\left(\frac{f}{b}\right)$  schließlich

$$\begin{aligned} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \circ \bullet |T| \cdot \text{III}(fT) &= |T| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(fT - n) = |T| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(T\left(f - \frac{n}{T}\right)\right) = \\ &= |T| \cdot \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

Die endgultige Abtastfunktion ist:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{|T|} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right) \circ \bullet \frac{1}{|T|} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

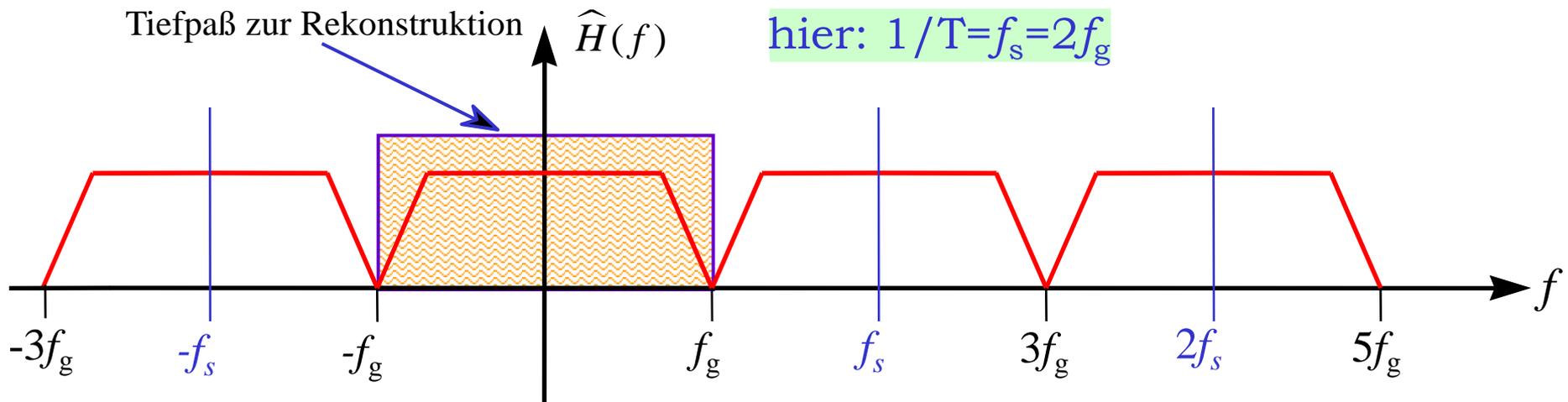
Abtasten von  $h(t)$  im Zeitbereich bedeutet:  $h(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

und mit  $h(t) \circ \bullet H(f)$  liefert die Fouriertransformation:

$$\hat{H}(f) = H(f) * \frac{1}{|T|} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

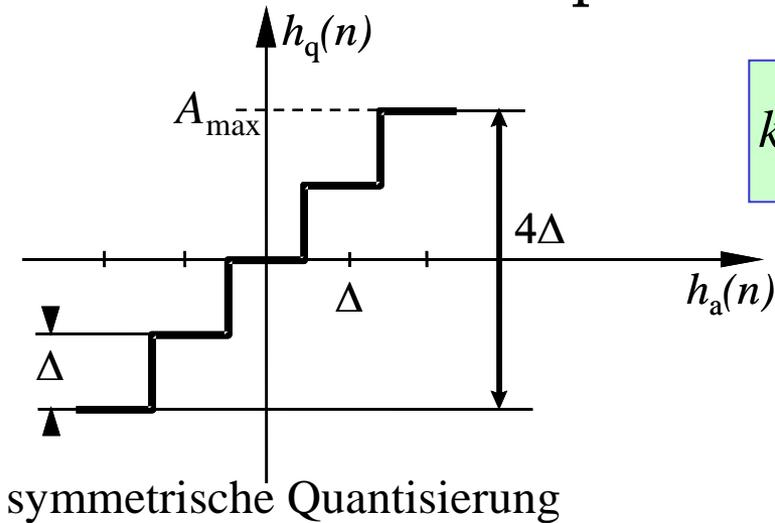
# Illustration der Auswirkung einer Zeitbereichsabtastung im Frequenzbereich:

unbegrenzte Zahl von Wiederholungen des Basisspektrums  $H(f)$



$$\hat{H}(f) = H(f) * \frac{1}{|T|} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n \cdot f_s) = \frac{1}{|T|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(f - n \cdot f_s)$$

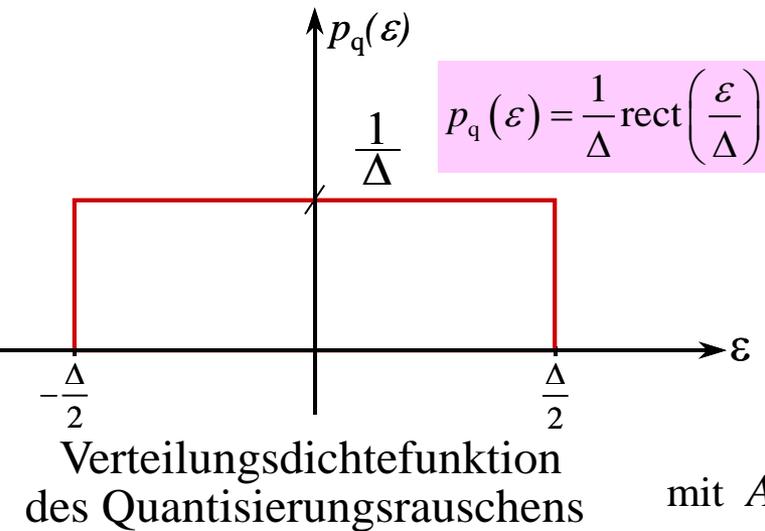
# Aspekte der Quantisierung



$$k = \frac{2 \cdot A_{\max}}{\Delta} + 1 \Rightarrow k \text{ Stufen für eine Amplitude } A_{\max}$$

ADW-Auflösung in bit

$$\frac{Z}{\text{bit}} = \log_2(k) = \log_2 \left\{ \frac{2A_{\max}}{\Delta} + 1 \right\} \approx \log_2 \left\{ \frac{2A_{\max}}{\Delta} \right\}$$



$$p_q(\epsilon) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{\epsilon}{\Delta}\right)$$

Berechnung der Störleistung  
(2. Moment der Verteilung)

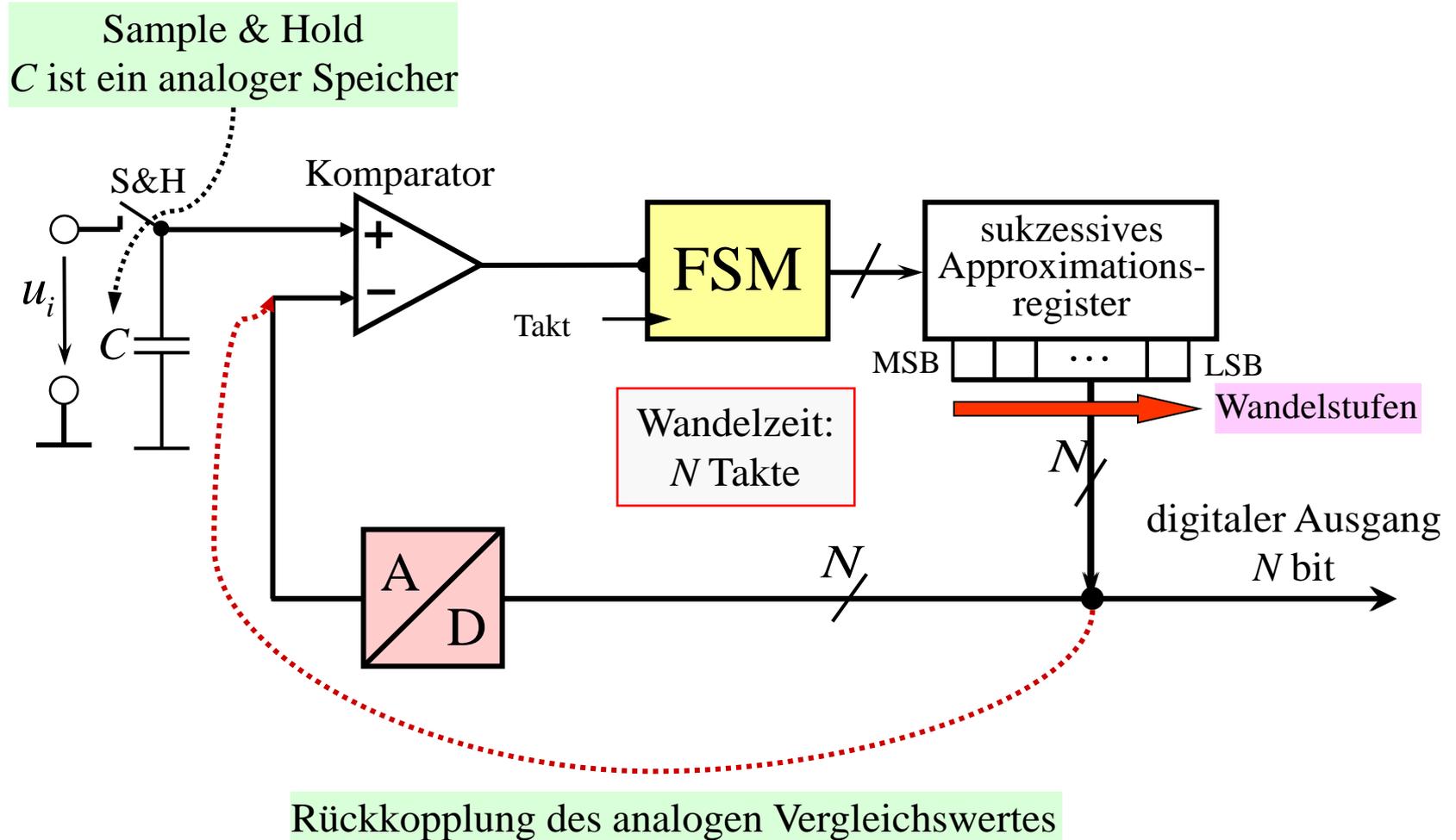
$$N_q = \int_{-\infty}^{\infty} p_q(\epsilon) \cdot \epsilon^2 d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

Berechnung des Signal-Störverhältnisses für ein Sinussignal mit der Amplitude  $A_{\max}$

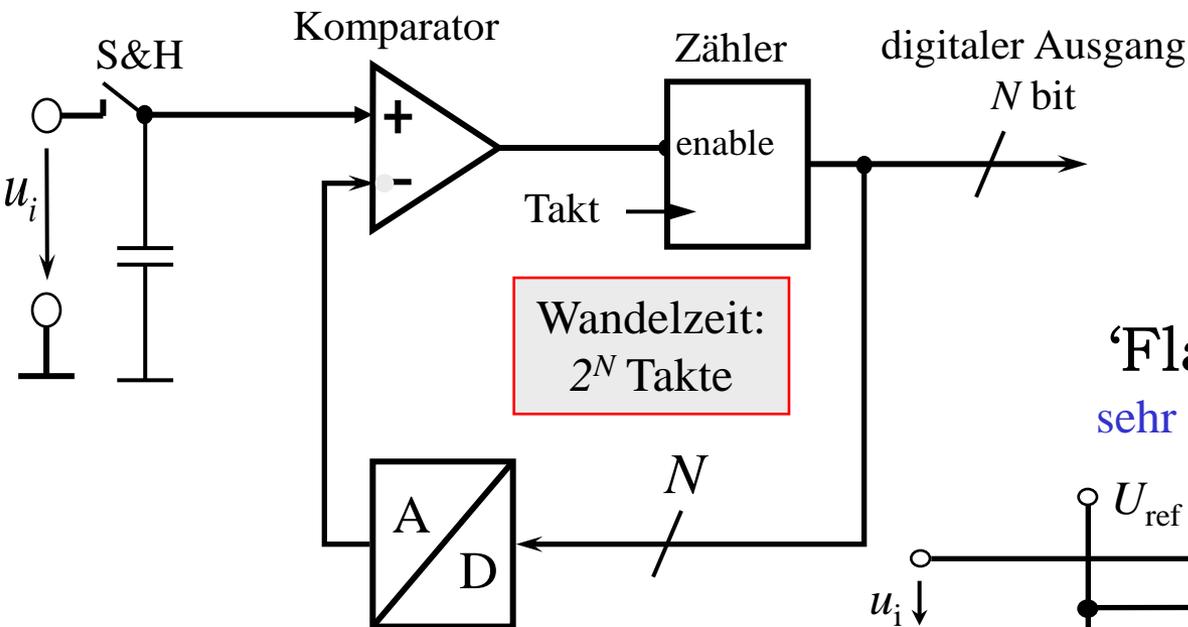
$$\text{mit } A_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 2^Z \cdot \Delta \Rightarrow \text{Signalleistung: } S_s = \frac{A_{\max}^2}{2} = \frac{1}{8} \cdot 2^{2Z} \cdot \Delta^2$$

$$\text{somit ist: } \frac{S_s}{N_q} = \frac{1}{8} \cdot 2^{2Z} \cdot \frac{\Delta^2}{\Delta^2/12} = \frac{3}{2} \cdot 2^{2Z} \text{ oder } \frac{a}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{S_s}{N_q} \right) = 10 \lg(1,5) + 20 \cdot Z \cdot \lg(2) = 1,76 + 6,02 \cdot Z$$

# A/D-Wandlung mittels sukzessiver Approximation



# Zwei weitere Verfahren

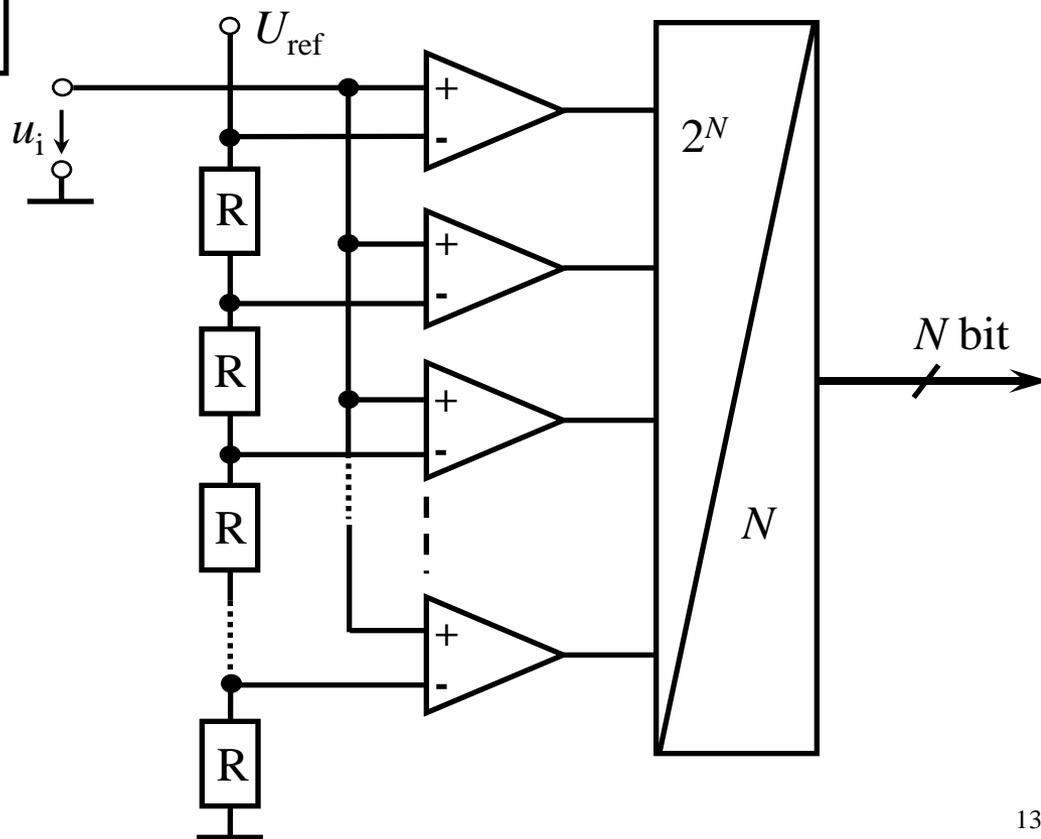


‘integrierende’  
A/D-Wandlung

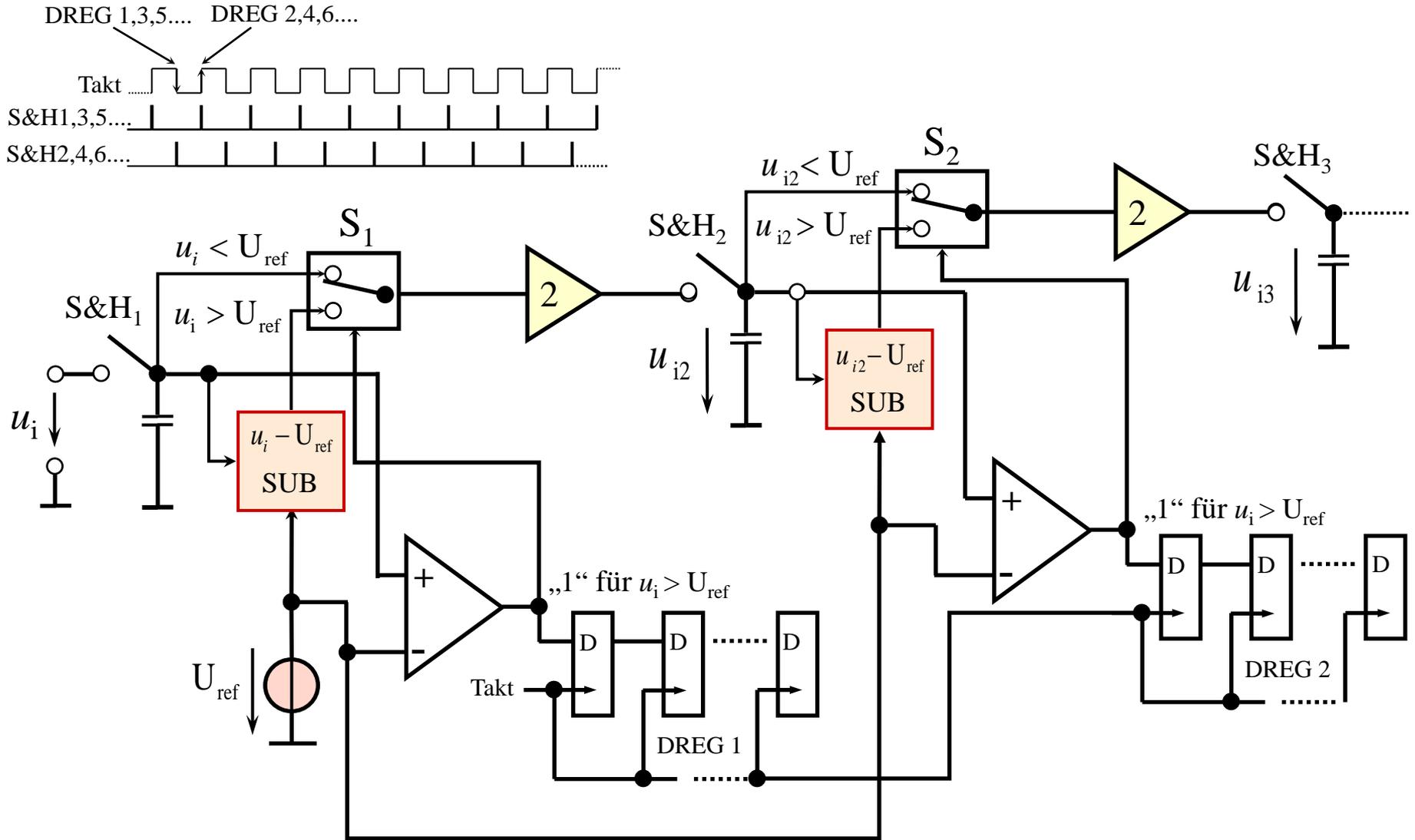
Dual-Slope.pdf

Wandelzeit:  
 $2^N$  Takte

‘Flash’-Konverter  
sehr schnell, hoher Aufwand

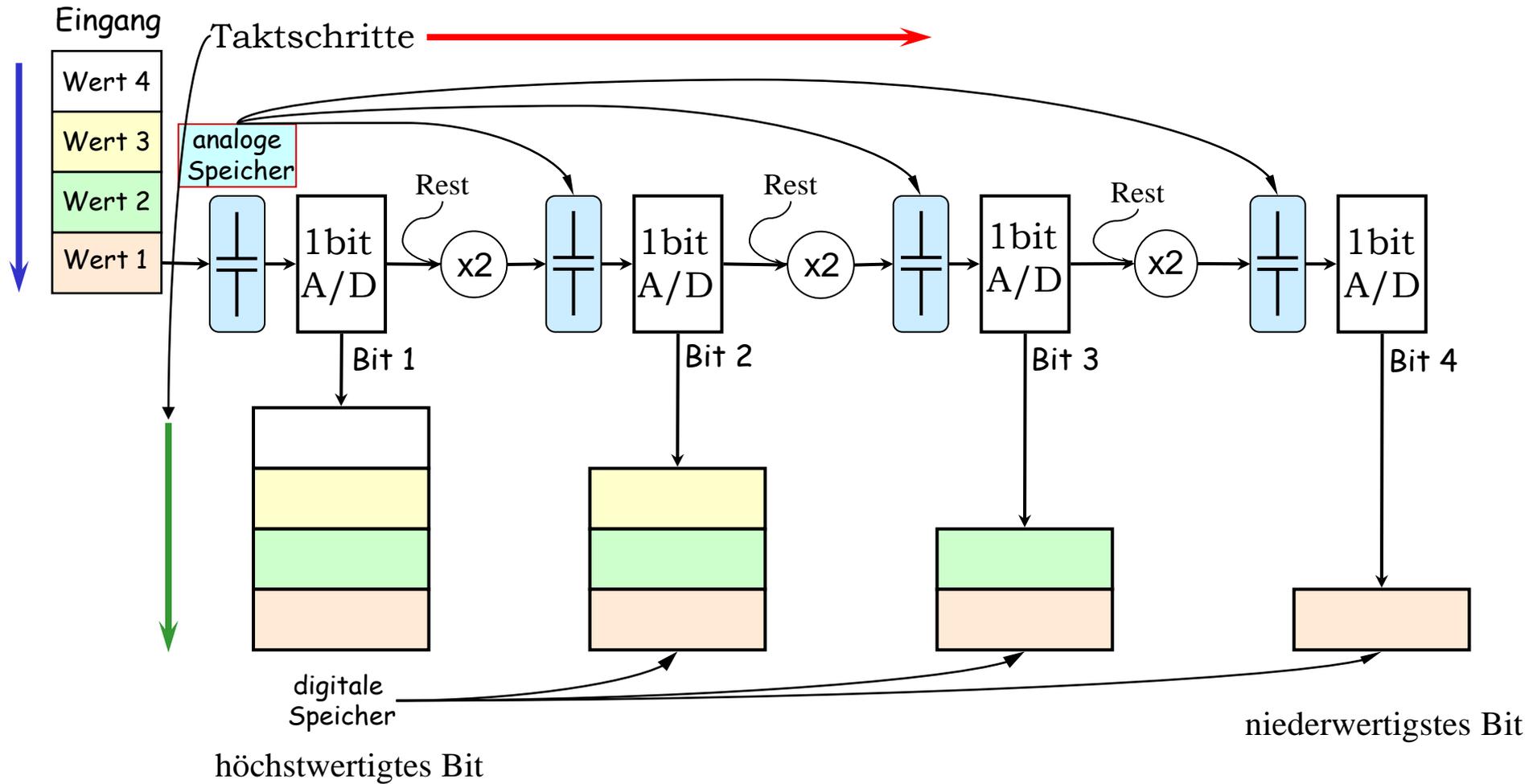


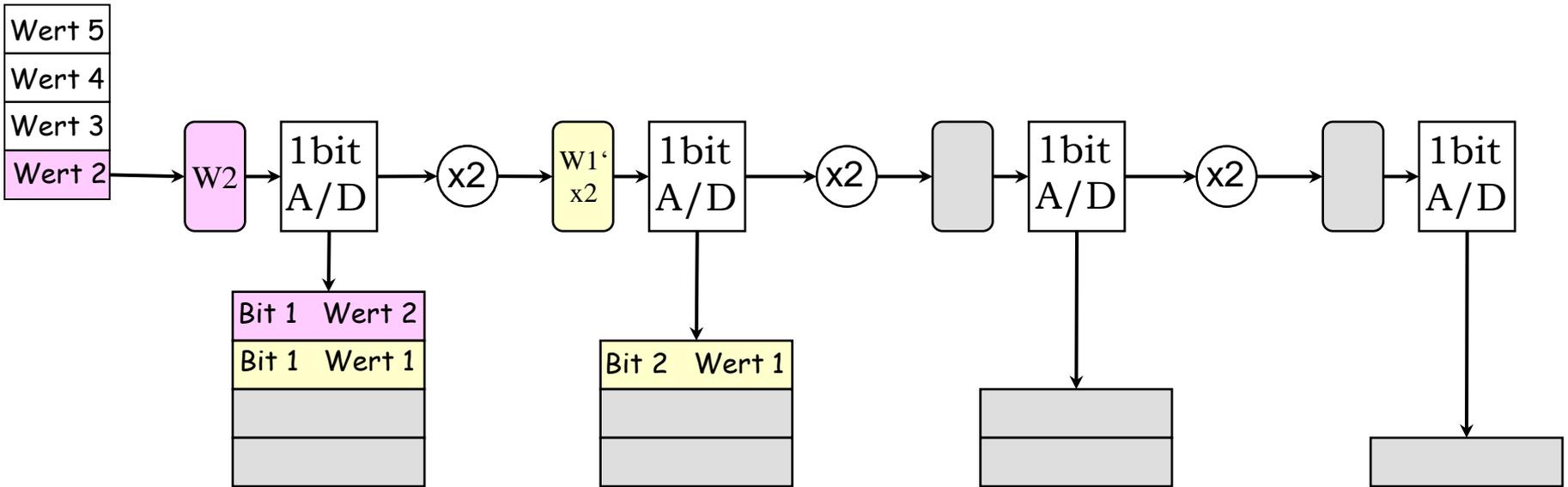
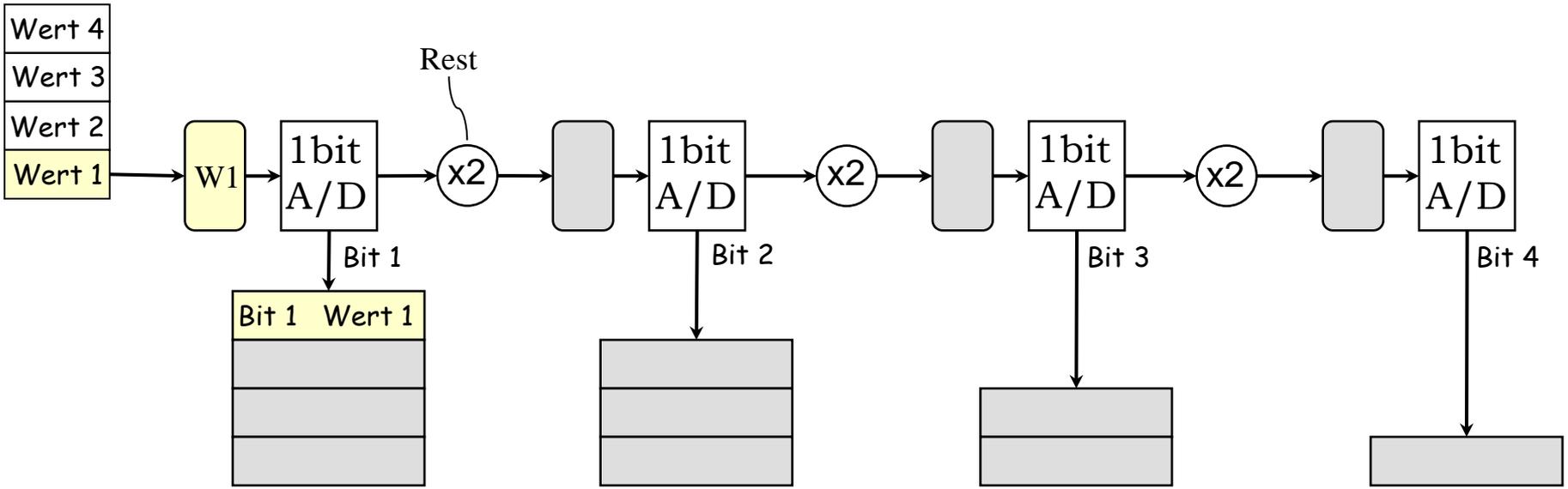
# A/D-Wandlung mit Pipelining - Übersicht

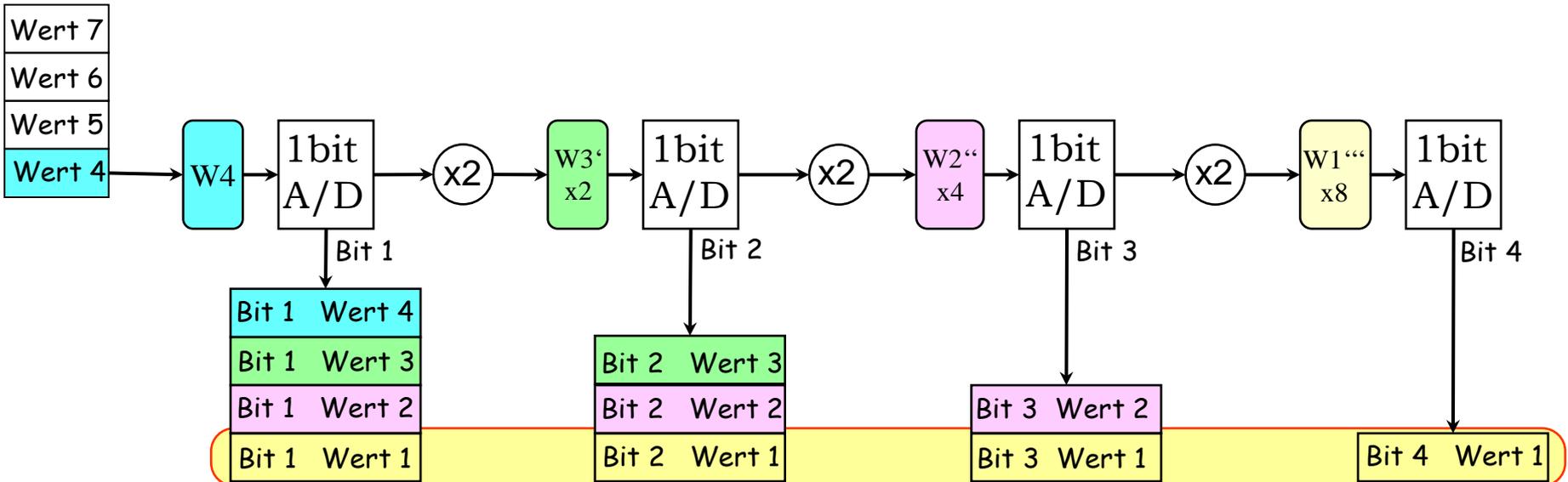
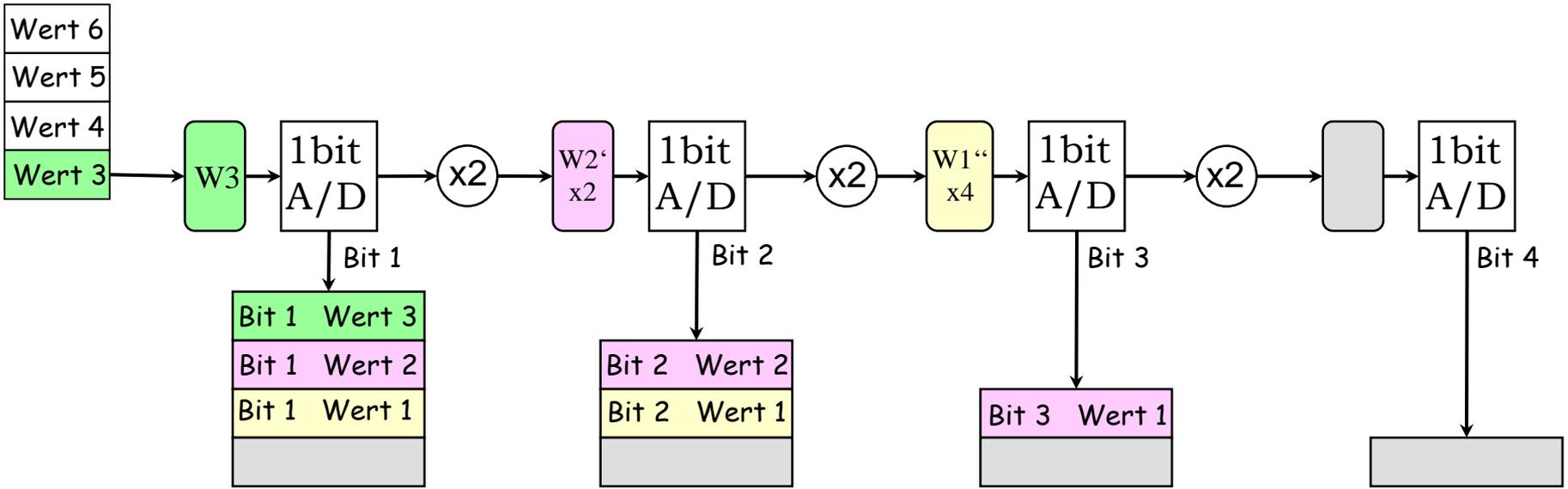


# A/D-Wandlung nach dem Pipelining-Prinzip

hier: 4bit in 4 Schritten







1. Wandelergebnis fertig

## Zahlenbeispiel

$$U_{i\max}=10V \Rightarrow U_{\text{ref}}=5V$$

N=8 (8 bit Auflösung)

$$U_i=6V$$

$U_i$  ist konstant, so dass jede Wandlung das gleiche Ergebnis liefert  
(sonst müsste die folgende Tabelle 8-mal dargestellt werden)

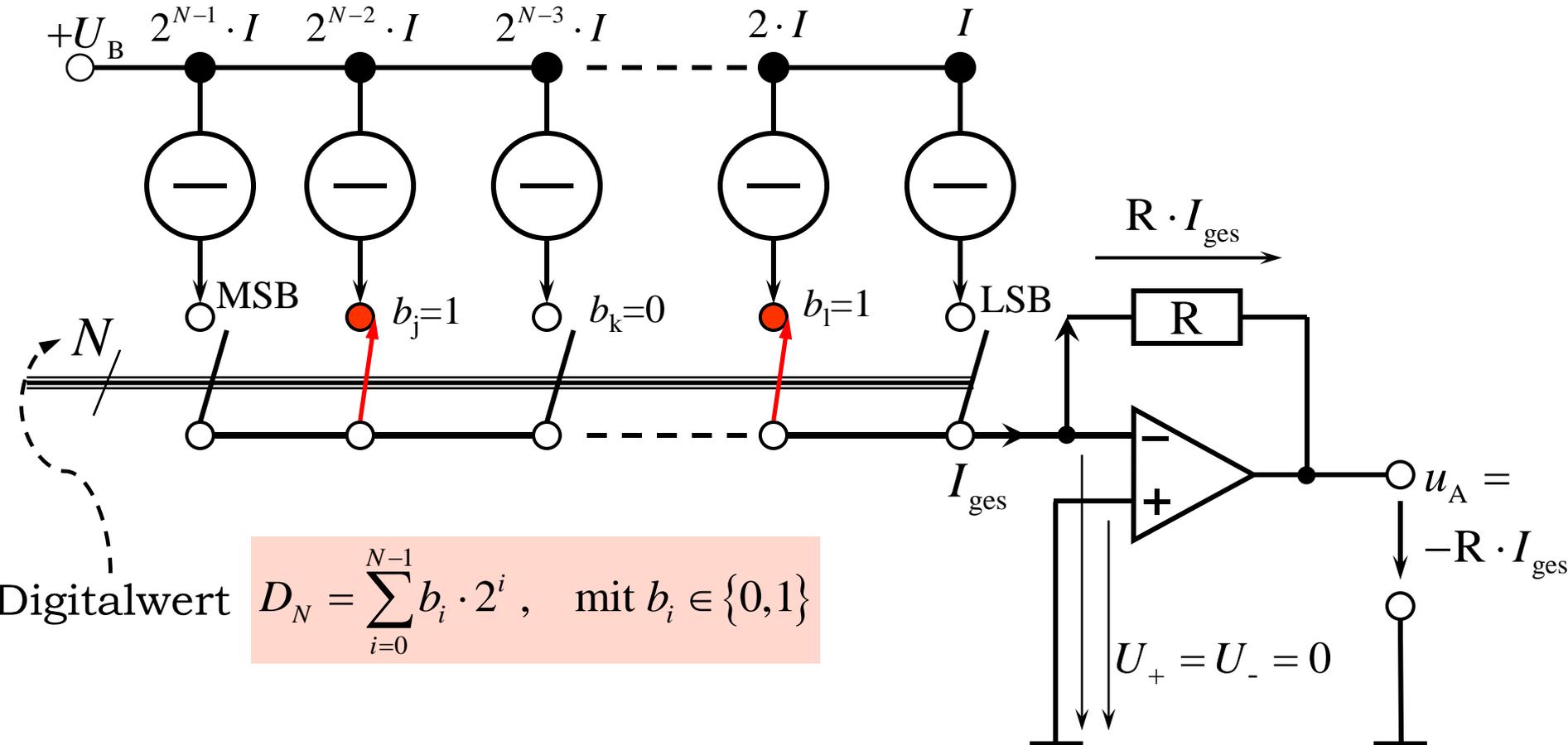
Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3	Stufe 4	Stufe 5	Stufe 6	Stufe 7	Stufe 8
$U_{i1}=6V$	$U_{i2}=2V$	$U_{i3}=4V$	$U_{i4}=8V$	$U_{i5}=6V$	$U_{i6}=2V$	$U_{i7}=4V$	$U_{i8}=8V$
$U_{i1} > U_{\text{ref}}$	$U_{i2} < U_{\text{ref}}$	$U_{i3} < U_{\text{ref}}$	$U_{i4} > U_{\text{ref}}$	$U_{i5} > U_{\text{ref}}$	$U_{i6} < U_{\text{ref}}$	$U_{i7} < U_{\text{ref}}$	$U_{i8} > U_{\text{ref}}$
$U_{i2}=2 \cdot 1V$	$U_{i3}=2 \cdot 2V$	$U_{i4}=2 \cdot 4V$	$U_{i5}=2 \cdot 3V$	$U_{i6}=2 \cdot 1V$	$U_{i7}=2 \cdot 2V$	$U_{i8}=2 \cdot 4V$	---
$K_1: „1“$	$K_2: „0“$	$K_3: „0“$	$K_4: „1“$	$K_5: „1“$	$K_6: „0“$	$K_7: „0“$	$K_8: „1“$

Gemäß der folgenden Tabelle stehen nach 8 Schritten komplette Ergebnisse in den Registern. Die Pipeline ist jetzt gefüllt, so dass in den Registern DREG<sub>i</sub> die jeweils rechts stehenden Bits mit jedem weiteren Takt einen neuen Wandelwert liefern. Im Beispiel ergibt sich der gleiche Wert „10011001“ 8-mal hintereinander; er entspricht der Spannung  $U_D = 5,9766V$

DREG <sub>1</sub>	DREG <sub>2</sub>	DREG <sub>3</sub>	DREG <sub>4</sub>	DREG <sub>5</sub>	DREG <sub>6</sub>	DREG <sub>7</sub>	DREG <sub>8</sub>
<b>1000 0000</b>	000 0000	00 0000	0 0000	0000	000	00	0
1100 0000	<b>000 0000</b>	00 0000	0 0000	0000	000	00	0
1110 0000	000 0000	<b>00 0000</b>	0 0000	0000	000	00	0
1111 0000	000 0000	00 0000	<b>1 0000</b>	0000	000	00	0
1111 1000	000 0000	00 0000	1 1000	<b>1000</b>	000	00	0
1111 1100	000 0000	00 0000	1 1100	1100	<b>000</b>	00	0
1111 1110	000 0000	00 0000	1 1110	1110	000	<b>00</b>	0
1111 1111	000 0000	00 0000	1 1111	1111	000	00	<b>1</b>

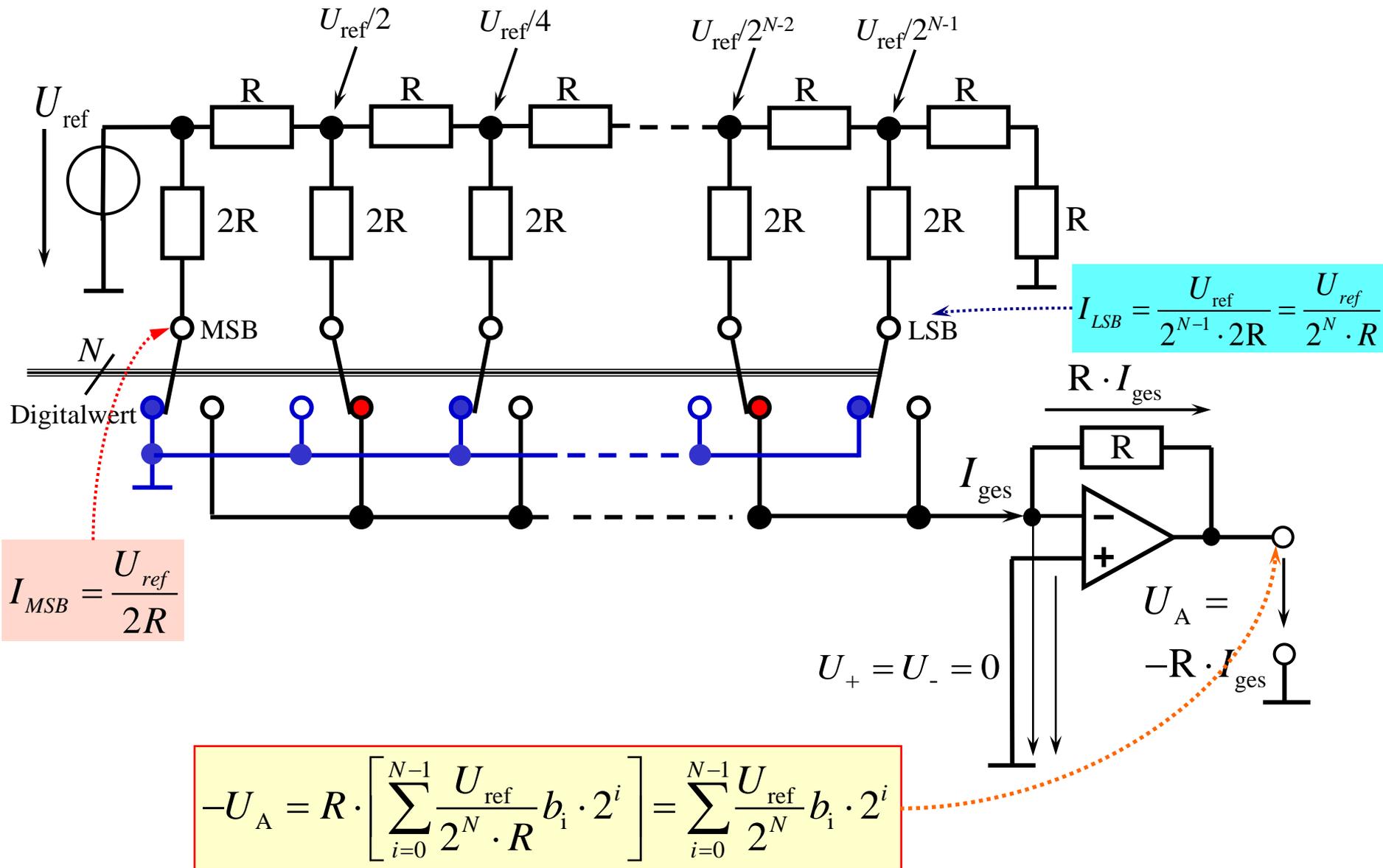
5V	5/2	5/4	5/8	5/16	5/32	5/64	5/128	$U_D$
1	0	0	1	1	0	0	1	
5	0	0	0,625	0,3125	0	0	0,0391	<b>5,9766</b>

# Prinzip der D/A-Wandlung mit gewichteten Stromquellen

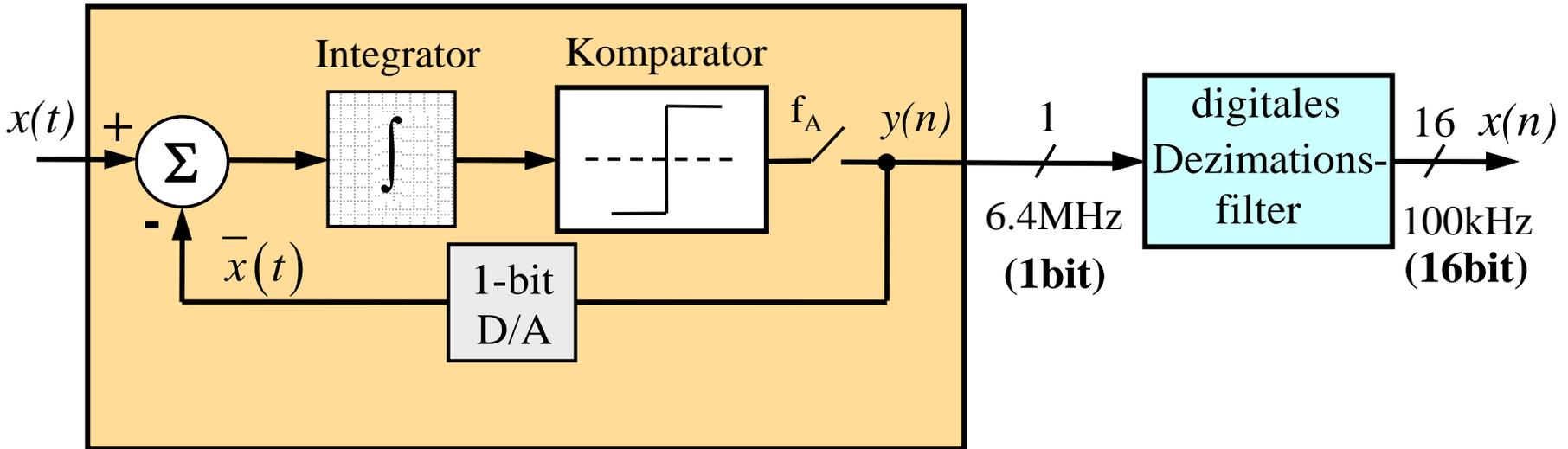


$$-U_A = R \cdot I \cdot \left[ \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot 2^i \right]$$

# D/A-Wandlung mit einem R/2R-Netzwerk



# Prinzip des Sigma-Delta A/D-Wandlers



=> Skript: ab Seite 88

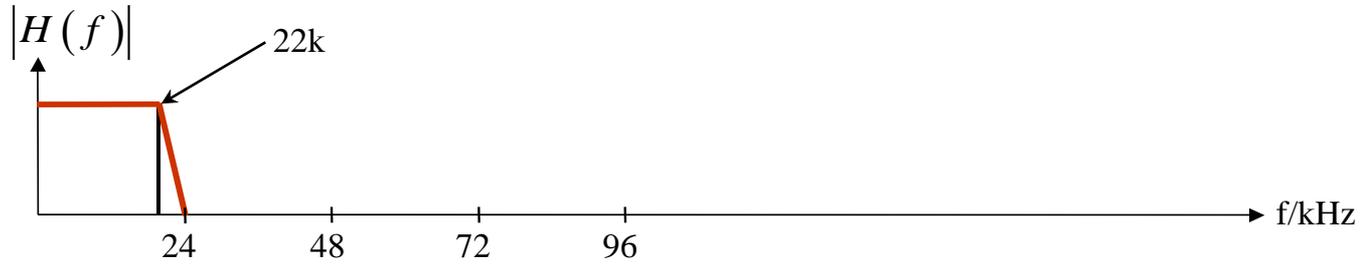
## Effekt einer n-fachen Überabtastung

$$\left[ \frac{S_s}{N_q} \right]_n = n \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^{2Z} \quad \frac{a}{\text{dB}} = 1,76 + 6,02 \cdot Z + 10 \cdot \lg(n)$$

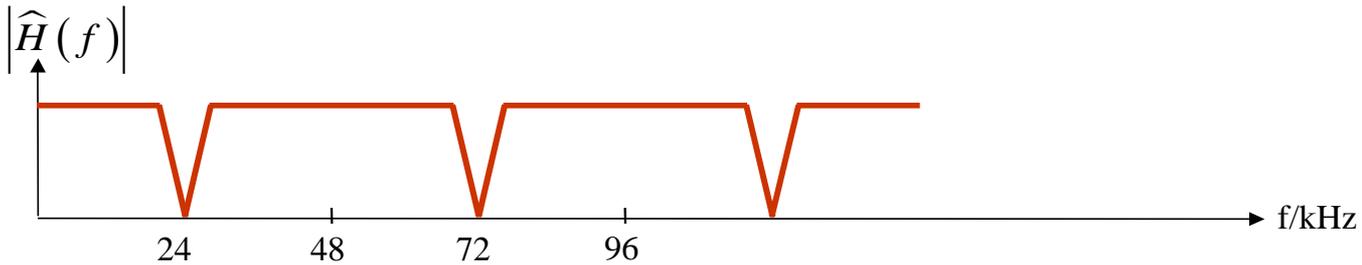
- 1 zusätzliches Bit an Auflösung bedeutet +6dB => n=4-fache ÜA
- 2 zusätzliche Bits an Auflösung bedeuten +12dB => n=16-fache ÜA
- 3 zusätzliche Bits an Auflösung bedeuten +18dB => n=64-fache ÜA

**n=4<sup>b</sup>**

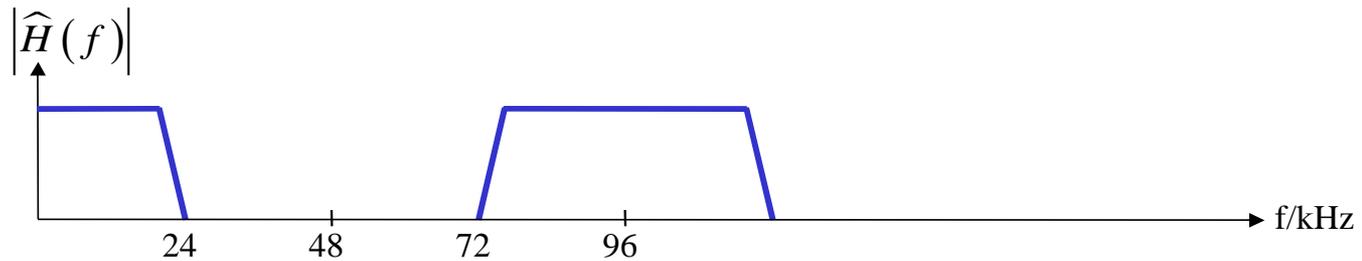
# Auswirkungen von Überabtastung (I)



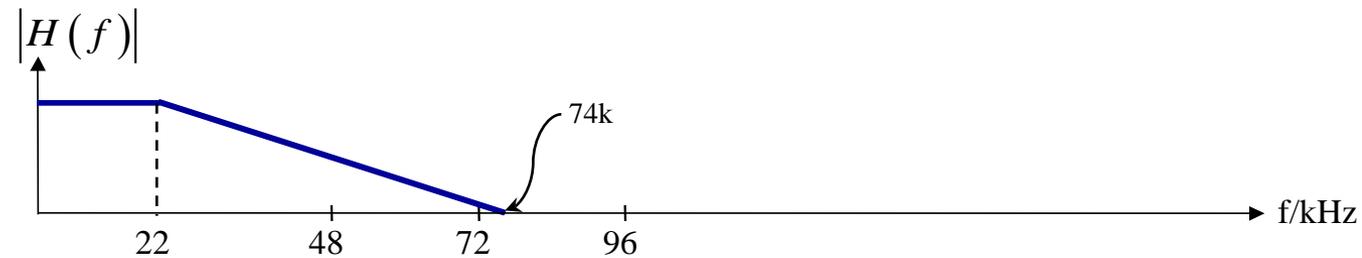
(a) Anti-Aliasingfilter für Abtastung mit Nyquist-Rate



(b) Spektrum nach Abtastung mit  $f_A=48\text{kHz}$

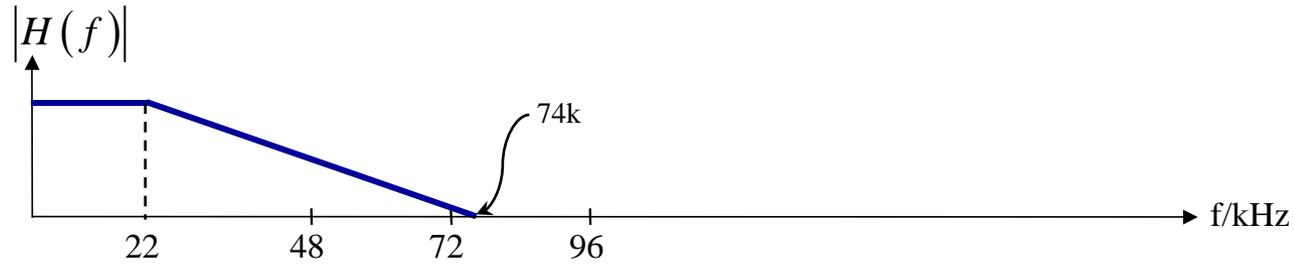


(c) Spektrum nach Abtastung mit  $f_A=96\text{kHz}$

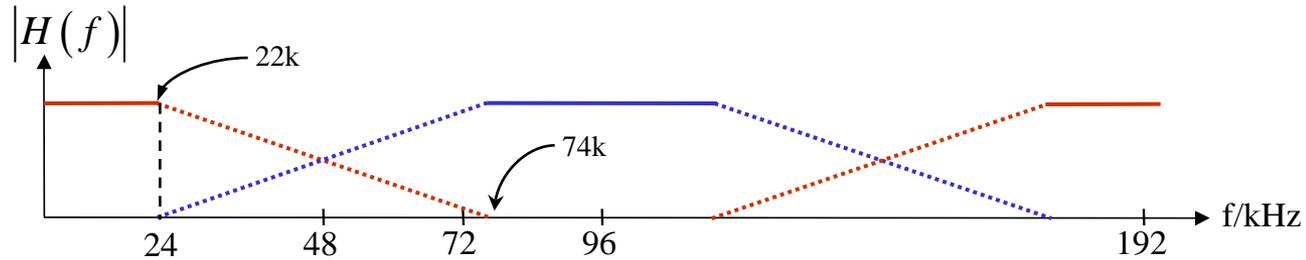


(d) Anti-Aliasingfilter bei zweifacher Überabtastung

# Auswirkungen von Überabtastung (II)



(d) Anti-Aliasingfilter bei zweifacher Überabtastung

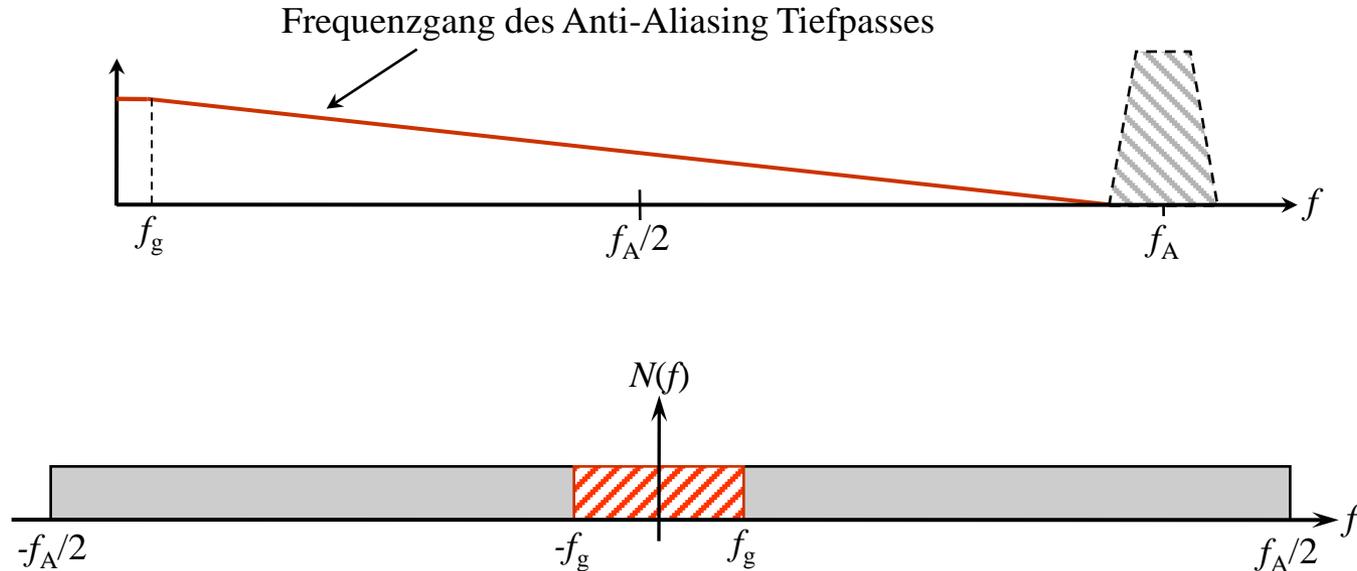


(e) Spektrum nach zweifacher Überabtastung mit  $f_A=96\text{kHz}$



(f) Benötigtes Digitalfilter für eine 2:1 Dezimation

# Auswirkungen von Überabtastung (III)



Rauschleistungsdichte des Quantisierungsrauschens  
 - Spread-Spectrum-Effekt -

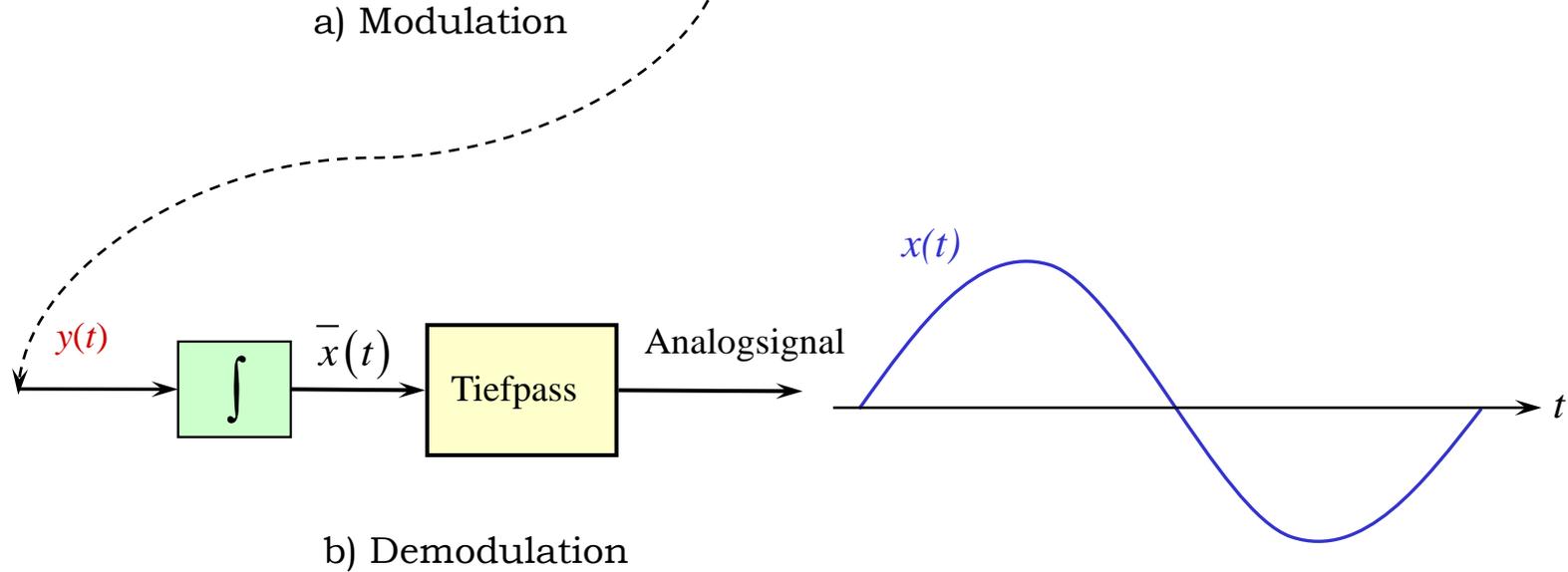
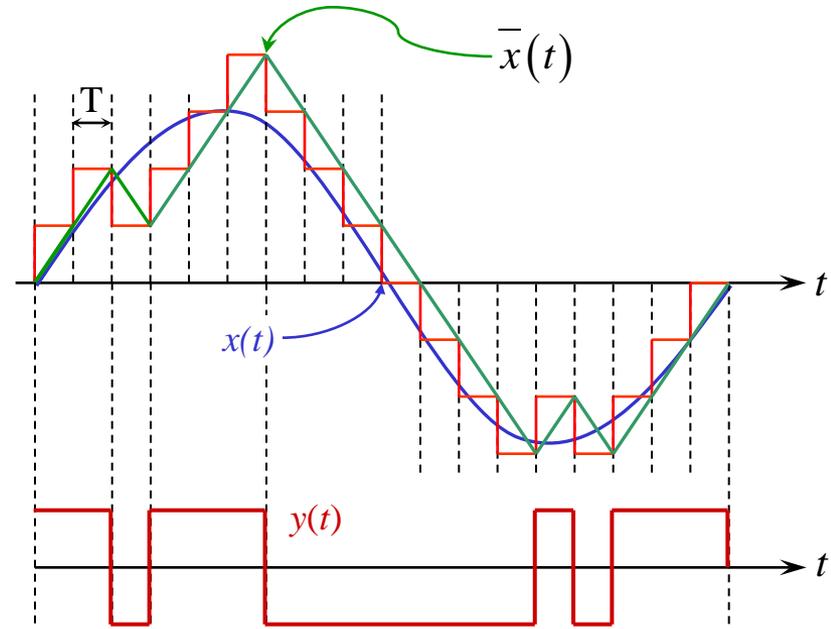
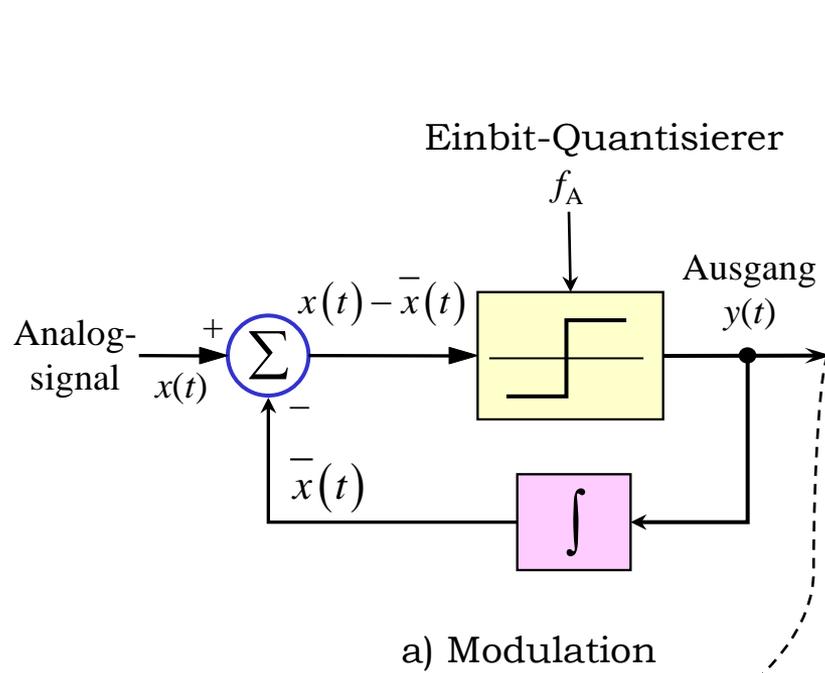
$$n_q(f) = \frac{\Delta^2}{12 \cdot f_A} = \frac{\Delta^2}{24 \cdot n \cdot f_g}, \quad \text{für } |f| \leq \frac{f_A}{2} = \frac{n \cdot f_g}{2} \text{ und sonst } 0$$

Rauschleistungsreduktion im Nutzband um den Faktor  $n$

$$N_n = \int_{-f_g}^{f_g} n_q(f) df = \frac{\Delta^2 \cdot 2f_g}{24 \cdot n \cdot f_g} = \frac{\Delta^2}{12 \cdot n}$$

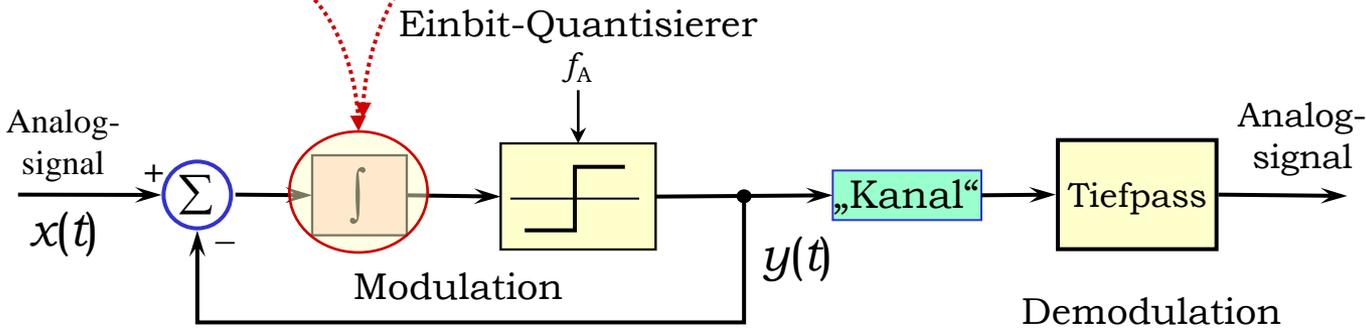
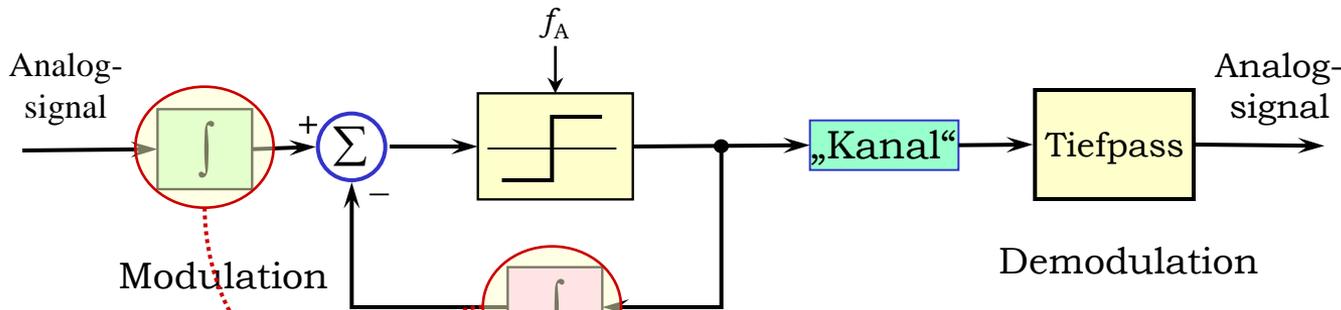
$$\left[ \frac{S_s}{N_q} \right]_n = n \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^{2Z} \Rightarrow \frac{a}{\text{dB}} = 1,76 + 6,02 \cdot Z + 10 \cdot \lg(n)$$

# Von der Deltamodulation zum Sigma-Delta-ADW-Prinzip (I)

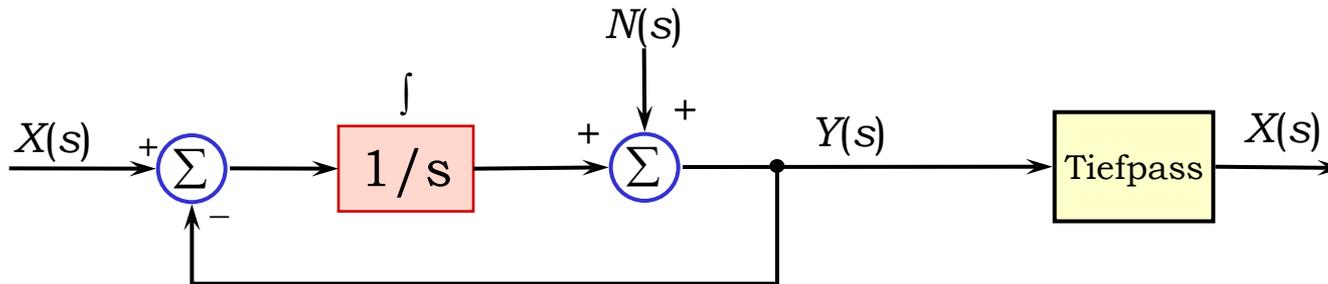


# Von der Deltamodulation zum Sigma-Delta-ADW-Prinzip (II)

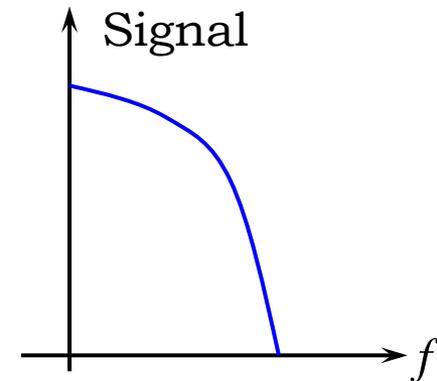
Einbit-Quantisierer



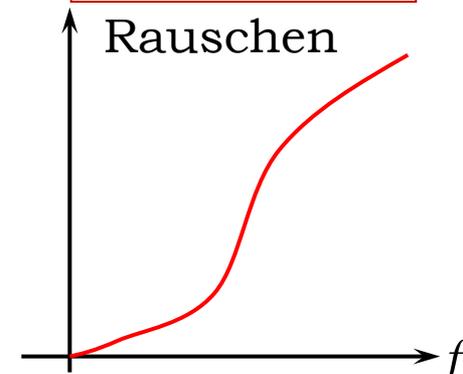
Quantisierungsrauschen



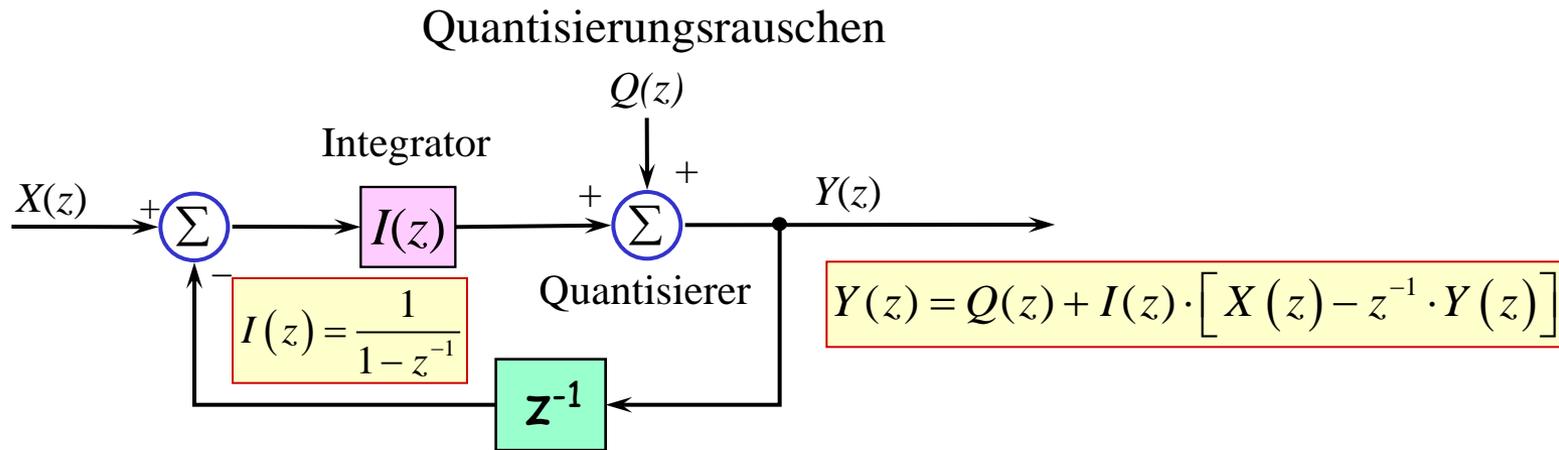
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+s},$$



$$R(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{s}{1+s}.$$



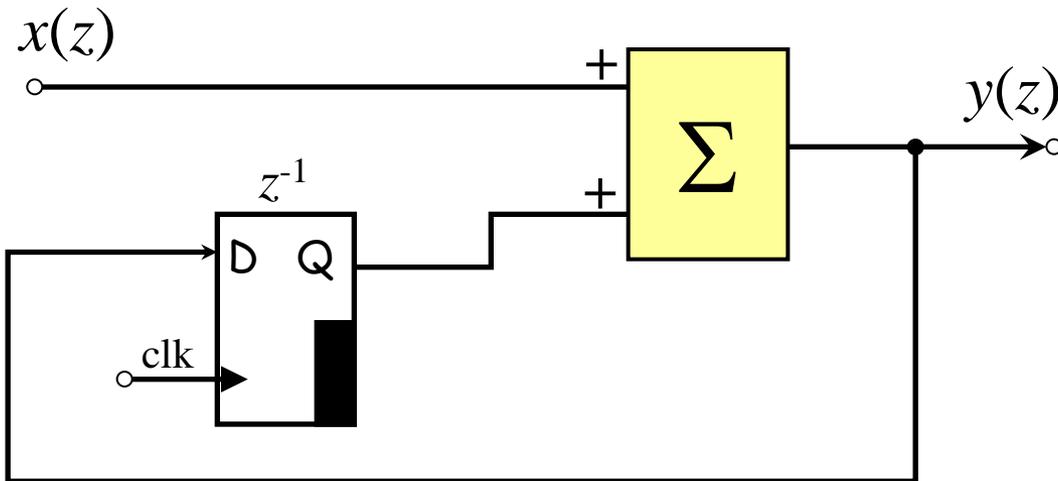
# Von der Deltamodulation zum Sigma-Delta-ADW-Prinzip (III)



$$Y(z) = X(z) \cdot \frac{I(z)}{1 + I(z) \cdot z^{-1}} + Q(z) \cdot \frac{1}{1 + I(z) \cdot z^{-1}}$$

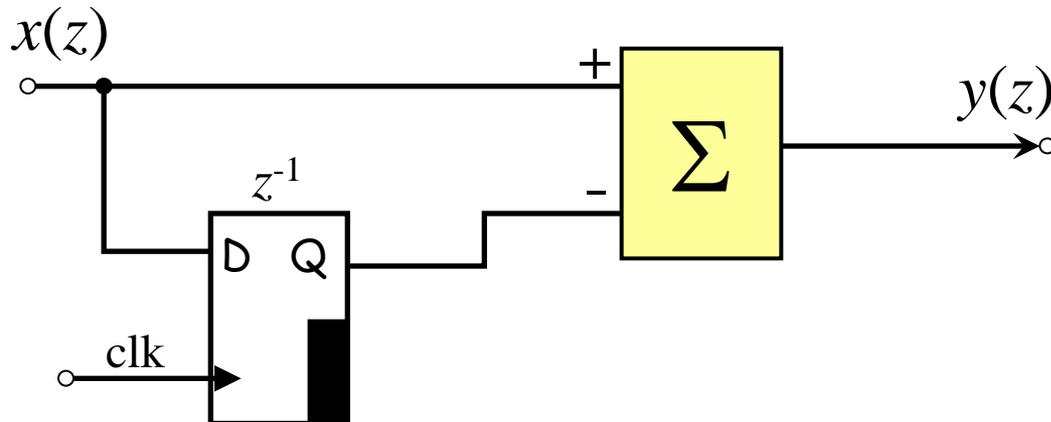
$$Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1}) \cdot Q(z)$$

## Digitaler Integrator



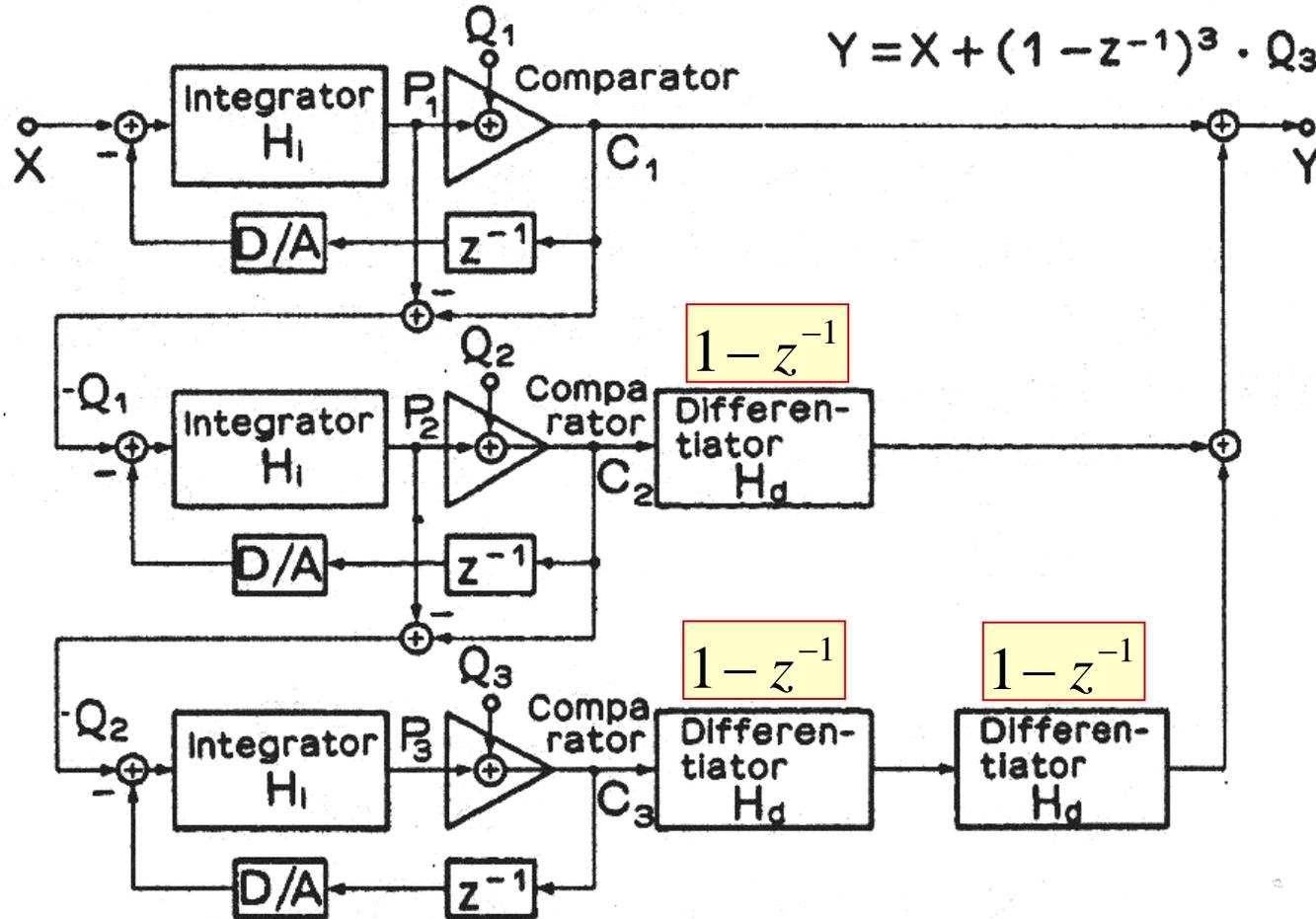
$$y(z) = x(z) + y(z) \cdot z^{-1} \Rightarrow$$
$$y(z) = \frac{x(z)}{1 - z^{-1}}$$

## Digitaler Differenzierer



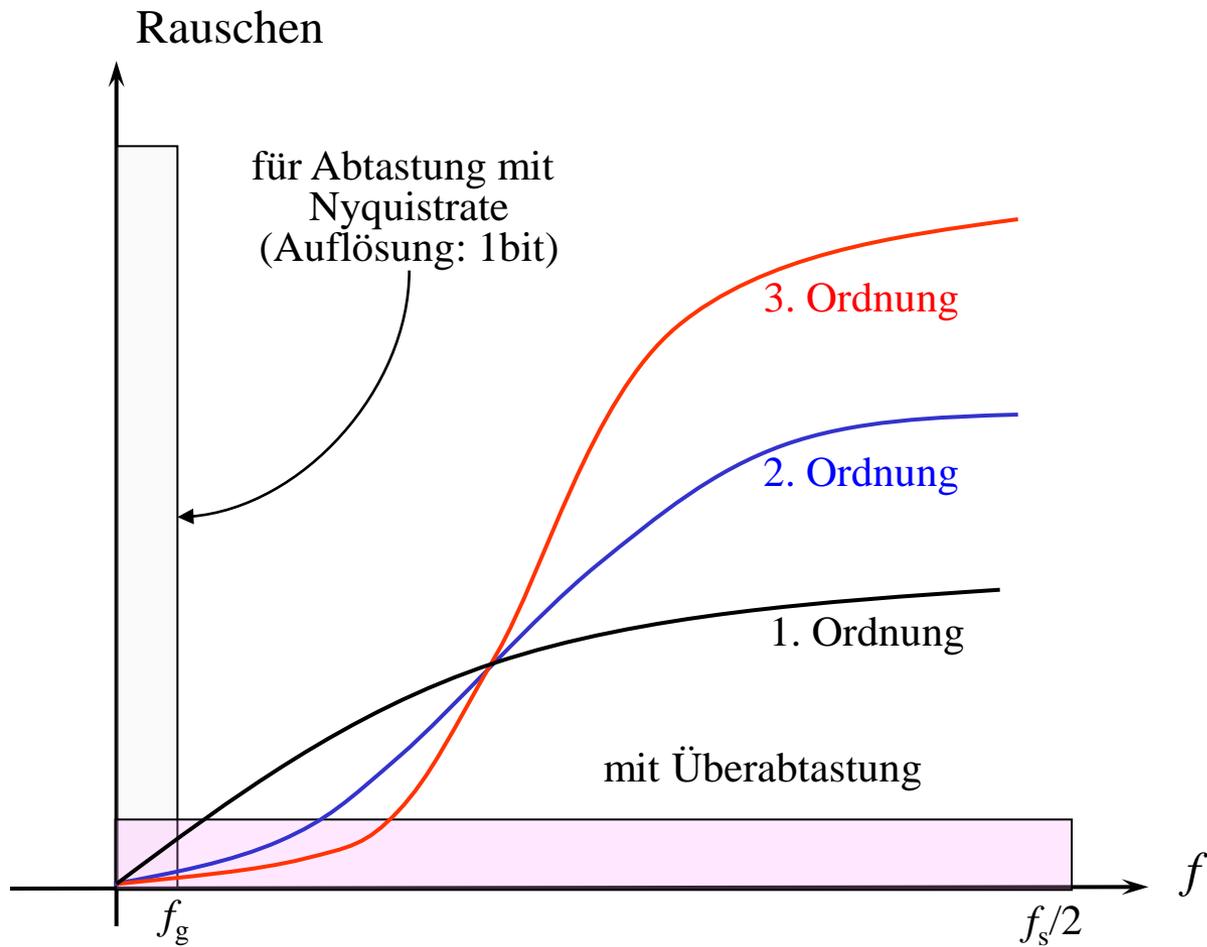
$$y(z) = x(z) \cdot (1 - z^{-1})$$

# Analyse eines Sigma-Delta-Loops 3. Ordnung



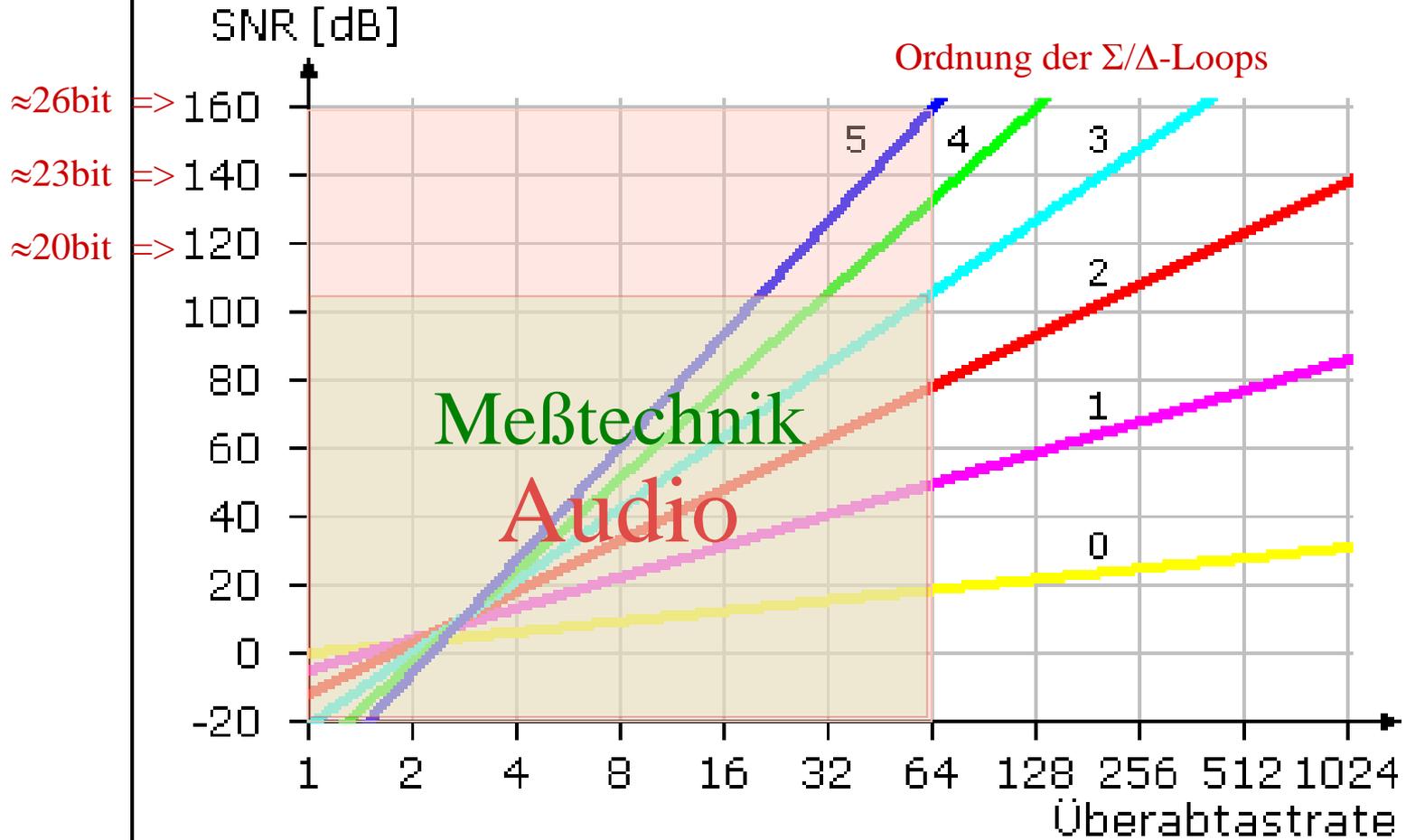
$$\begin{aligned}
 Y(z) &= C_1(z) + (1 - z^{-1}) \cdot C_2(z) + (1 - z^{-1})^2 \cdot C_3(z) \\
 &= X(z) + (1 - z^{-1})^3 Q_3(z)
 \end{aligned}$$

=>Skript: Seiten 96/97

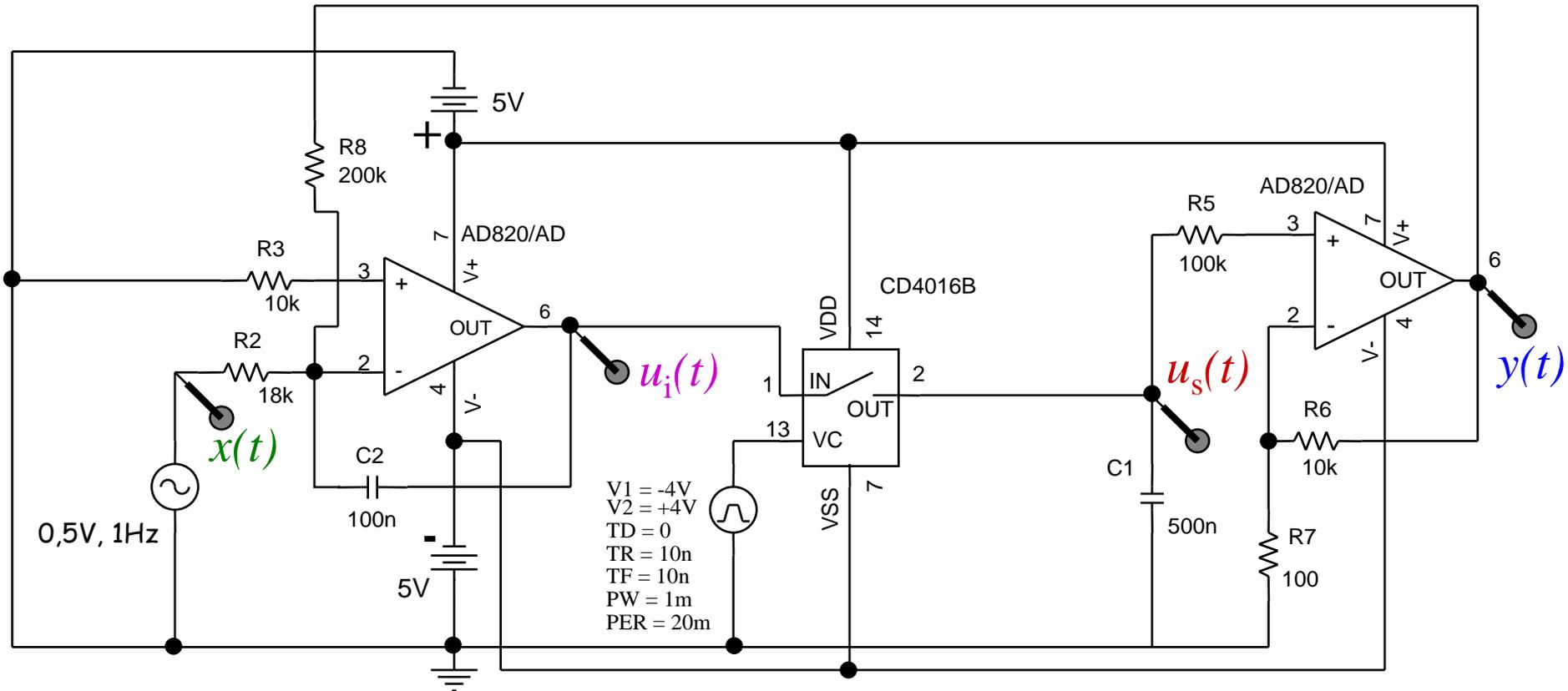


$$\text{Signal-Störverhältnis bei } Z \text{ bit: } \frac{a}{\text{dB}} = 10 \lg \left( \frac{S_s}{N_q} \right) \approx 2 + 6 \cdot Z \Rightarrow$$

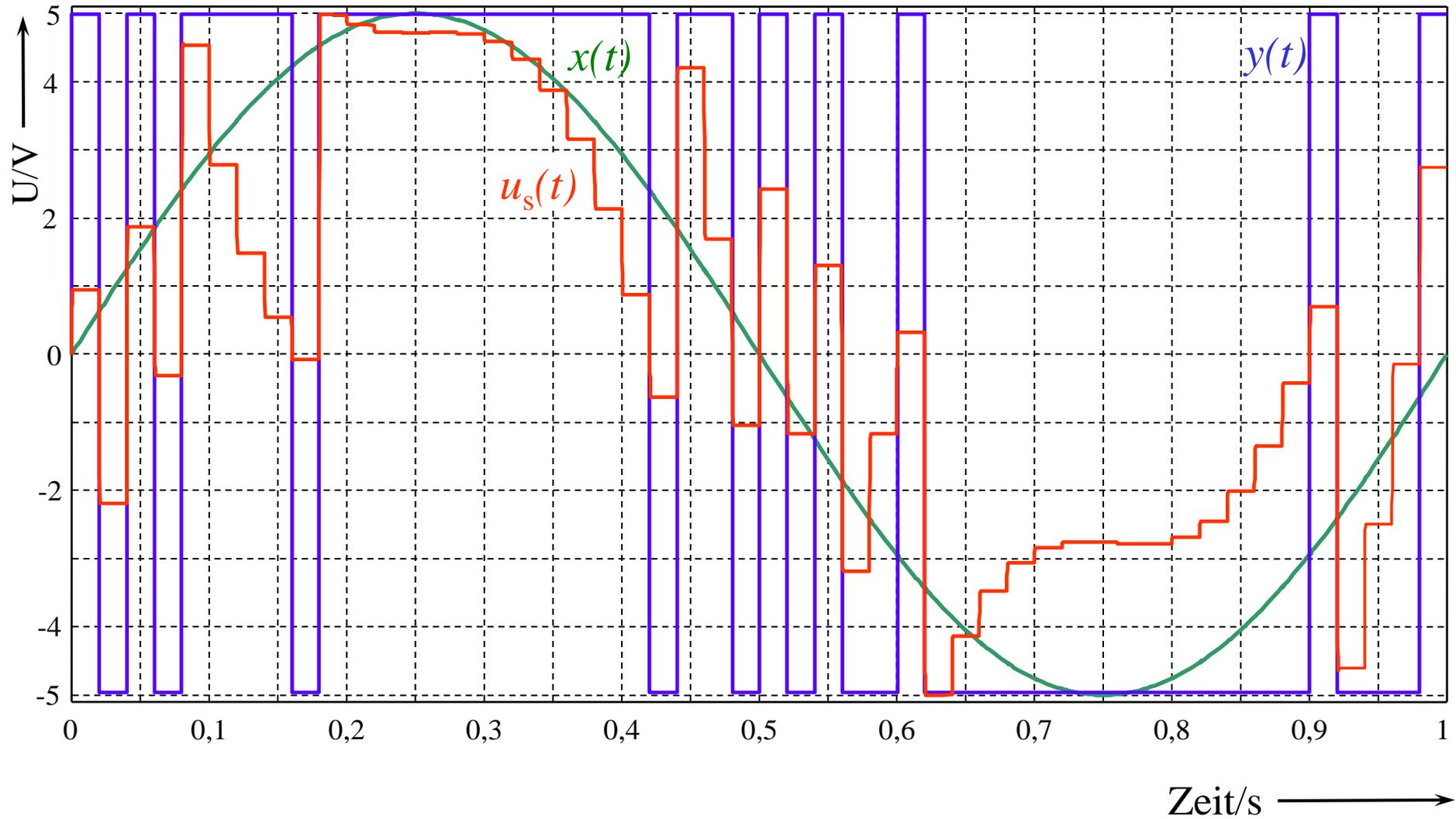
$$Z \approx \frac{\left( \frac{a}{\text{dB}} - 2 \right)}{6}$$



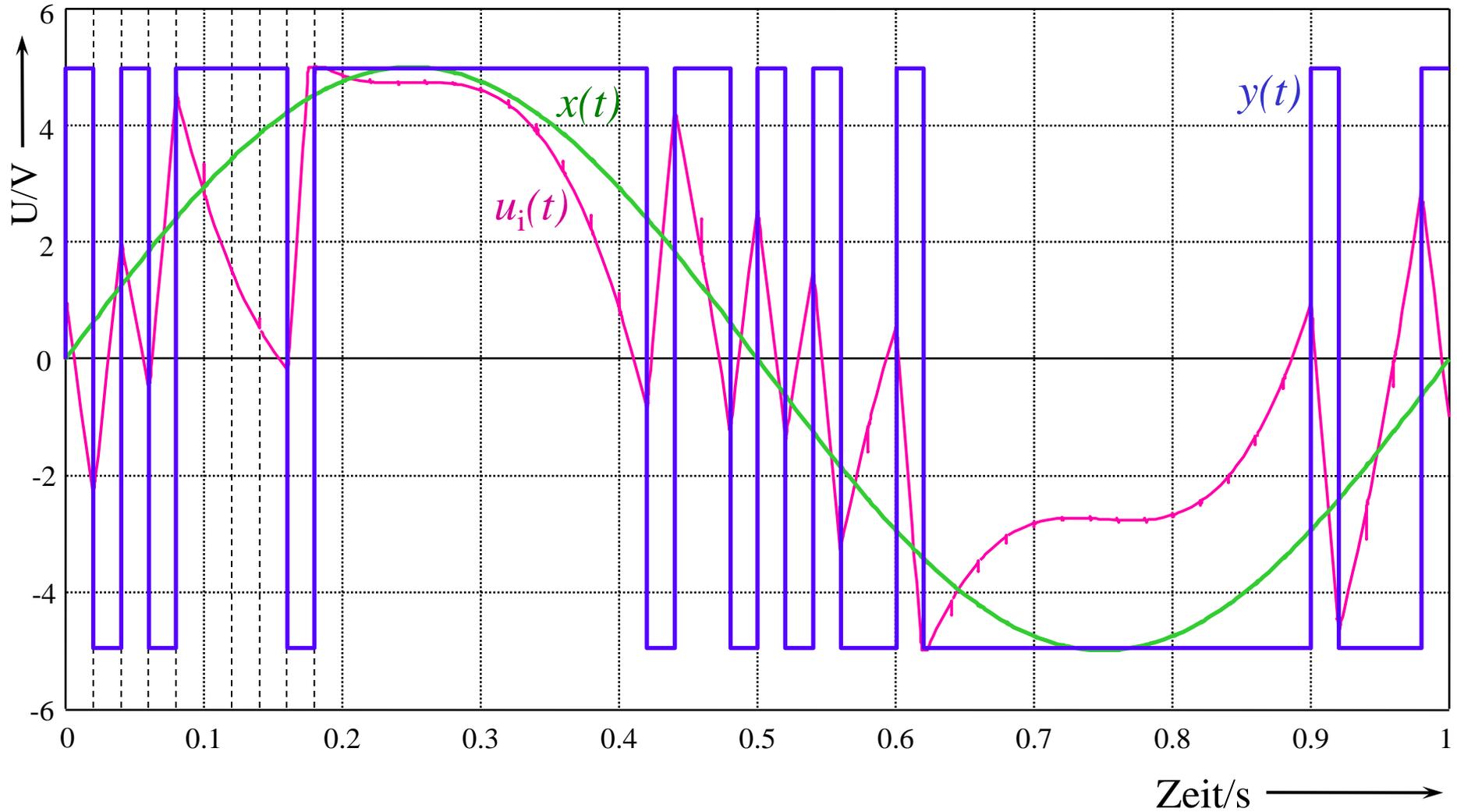
# Simulation des Zeitverhaltens eines $\Sigma\Delta$ -Loops 1. Ordnung mit SPICE



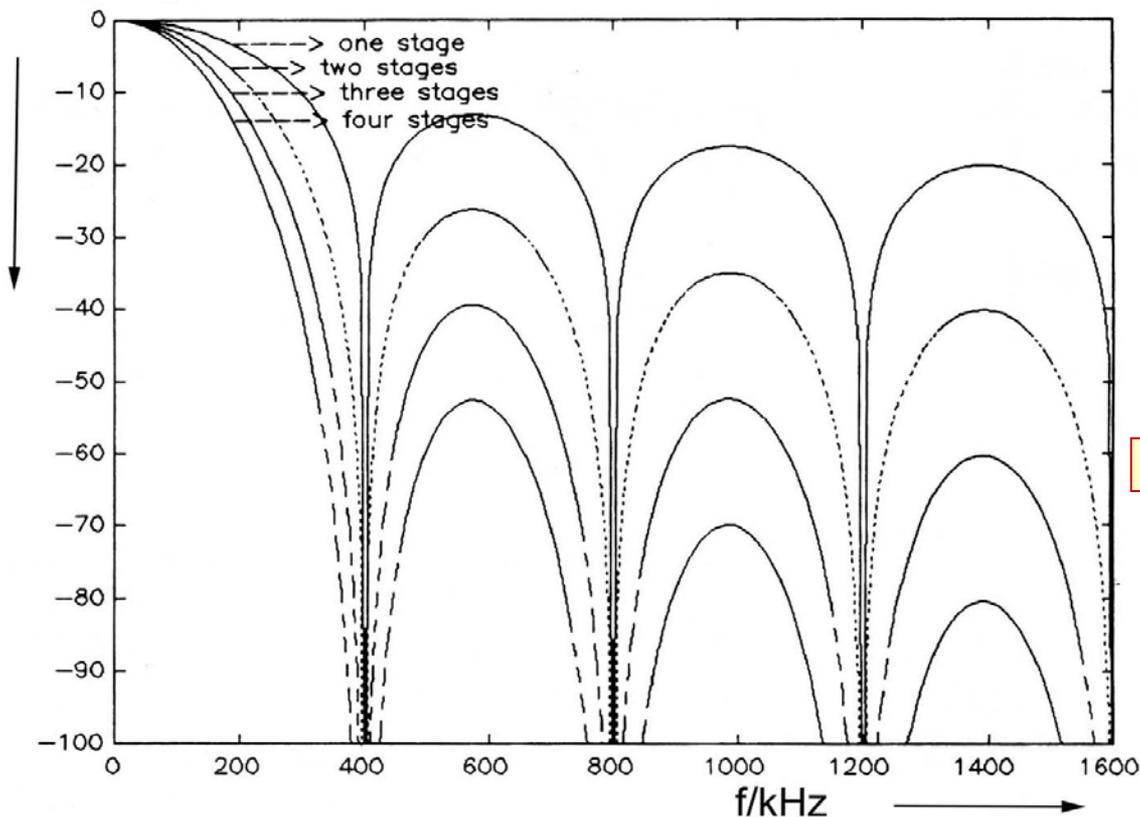
# Zeitverläufe des Ein- und Ausgangsignals und des Abtastsignals $u_s(t)$



# Zeitverläufe des Ein- und Ausgangsignals und des Integratorausgangssignals $u_i(t)$



Dämpfung/dB



Kammfilter-  
Übertragungsfunktion:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Zeitbereich:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

normiert auf N:

“gleitende Mittelwertbildung“

$$y_m(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{v=0}^{N-1} x(n-v)$$

Summe gem. geometrischer Reihe

=> rekursive Berechnung im Zeitbereich

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y(n) - y(n-1) = x(n) - x(n-4) \Rightarrow y(n) = x(n) - x(n-4) + y(n-1)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot [1 - z^{-N}] \cdot X(z)$$

